NoiStudiamo

DISPENSA DI TEORIA

Elementi di Analisi Matematica 1

Numeri reali e complessi, successioni, limiti e continuità, calcolo differenziale e studio delle funzioni di una variabile

A CURA DI

Damiano La Pusata

Ottobre 2026

INDICE

Indice dei capitoli

Dai numeri reali allo studio completo di una funzione.

1. **Insiemi numerici e proprietà generali delle funzioni** 3
2. **Limiti di successioni e di funzioni** 28
3. **Funzioni continue** 55
4. **Calcolo differenziale** 63
5. **Applicazioni del calcolo differenziale** 75

CAPITOLO 1

Insiemi numerici e proprietà generali delle funzioni

Dai numeri naturali ai reali e ai complessi, con le nozioni di estremo, di intorno e di insieme aperto o chiuso. Segue la teoria generale delle funzioni di una variabile reale e le funzioni elementari.

Dai numeri naturali ai numeri reali

Si considerano noti gli insiemi $\mathbb{N}$ dei naturali, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}$ degli interi relativi e $\mathbb{Q}$ dei razionali, e il concetto di funzione tra insiemi. I naturali sono un concetto primitivo, legato alla capacità di contare; primitivo è anche il successivo di un numero, indicato per ora con n' perché l'addizione non è ancora definita. Nei naturali vale il principio di induzione, che si assume come postulato: se una proprietà vale per $n = 1$ (o $n = 0$) e dalla sua validità per n si deduce quella per il successivo n', allora vale per ogni numero naturale.

OPERAZIONI E ORDINE IN N

A partire dal principio di induzione si definiscono, per $a \in \mathbb{N}_0$ e $n \in \mathbb{N}_0$, la somma, il prodotto e la potenza. Ogni definizione è ricorsiva: dice quanto vale l'operazione per $n = 0$ e come si passa da n al suo successivo n'.

OPERAZIONE	DEFINIZIONE RICORSIVA
Somma	$a + 0 = a$, $a + n' = (a + n)'$
Prodotto	$a \cdot 0 = 0$, $a \cdot n' = a \cdot n + a$
Potenza	$a^0 = 1$, $a^{n'} = a^n \cdot a$

ESEMPIO

Il successivo di a è $a + 1$. Si ricava dalla definizione ricorsiva della somma.

1. Si scrive la seconda regola della somma, $a + n' = (a + n)'$, scegliendo $n = 0$.

$$a + 0' = (a + 0)'$$

2. Il successivo di zero è uno, cioè $0' = 1$, quindi il primo membro è $a + 1$. Per la prima regola della somma $a + 0 = a$, quindi il secondo membro è il successivo di a.

$$a + 1 = a + 0' = (a + 0)' = a'$$

RISULTATO

Il successivo di a è $a + 1$: sommare 1 significa passare al successivo.

Le potenze verificano $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, $(a^n)^m = a^{nm}$ e $(ab)^n = a^n b^n$. L'ordine si introduce ponendo $a < b$ se esiste $n \in \mathbb{N}$ con $a + n = b$.

DA N A Z, Q, R

Le operazioni inverse non sono sempre risolubili: la sottrazione $b + n = a$ lo è solo se $a > b$, la divisione $a = bn$ solo se a è multiplo di b. Per questo si introducono gli insiemi successivi.

- **Interi relativi.** A ogni n si associano due simboli, $+n$ (positivo) e $-n$ (negativo): $\mathbb{Z} = \{0\} \cup \{+n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$. In $\mathbb{Z}$ la sottrazione è sempre risolta, e $\mathbb{N}$ si identifica con i positivi.
- **Razionali.** $\mathbb{Q}$ è formato dallo zero e dalle coppie (m, n) con $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, scritte come frazioni $\pm m/n$. In $\mathbb{Q}$ la divisione è sempre risolta, e $\mathbb{Z}$ si identifica con i razionali di denominatore 1.
- **Reali.** In $\mathbb{Q}$ non si risolve l'estrazione di radice: l'ipotenusa di un triangolo con cateti di lunghezza 1 richiederebbe un razionale di quadrato 2, che non esiste. Ogni razionale ha una rappresentazione decimale finita o periodica. L'insieme dei numeri reali è formato dallo zero e da tutti gli allineamenti decimali $\pm a_0, a_1a_2\ldots$, con $a_0 \in \mathbb{N}_0$ e $a_i \in \{0, \ldots, 9\}$, periodici o no.

DEFINIZIONE

Numeri reali. $\mathbb{R} = \{0\} \cup \{\pm a_0, a_1a_2\ldots \mid a_0 \in \mathbb{N}_0, a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}\}$. Se l'allineamento è periodico il numero è razionale, altrimenti irrazionale. Il numero a_0 è la parte intera. L'opposto di $a = \pm a_0, a_1\ldots$ è $-a = \mp a_0, a_1\ldots$. Vale $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

ORDINE E SOMMA NEI REALI

Per l'ordine: ogni numero negativo è minore di zero e ogni positivo è maggiore di zero; tra due positivi è maggiore quello che ha la prima cifra diversa più grande; per $a, b < 0$ si pone $a < b$ se $-a > -b$.

ESEMPIO

Confronto tra due reali positivi. Stabilire quale dei due numeri +4,718652… e +4,718372… è maggiore.

1. Si confrontano le cifre da sinistra a destra, a partire dalla parte intera. Le parti intere sono uguali.
$$4 = 4$$
2. Le prime tre cifre decimali coincidono.
$$4{,}718\ldots \text{ e } 4{,}718\ldots$$
3. La quarta cifra decimale è la prima diversa: nel primo numero vale 6, nel secondo 3.
$$6 > 3$$

RISULTATO

Il primo numero è il maggiore.

$$4{,}718652\ldots > 4{,}718372\ldots$$

Per la somma si pone $a + 0 = a$; per due positivi a, b si considerano, al variare di n, le somme dei troncamenti $s_n = a_0, a_1\ldots a_n + b_0, b_1\ldots b_n$, che da un certo n in poi hanno tutte la stessa parte intera, la stessa prima cifra decimale e così via (procedimento di stabilizzazione): il numero reale così individuato è $a + b$. Se uno dei due è negativo si procede come nei razionali, e le altre operazioni si introducono in modo simile.

ESEMPIO

Somma per troncamenti. Calcolare $x + y$ con $x = +7{,}24856\ldots$ e $y = +4{,}37668\ldots$.

1. Si troncano x e y alla stessa cifra decimale: $n = 1$ significa una cifra decimale, $n = 2$ due cifre, e così via. Per ogni n si calcola la somma s_n dei due troncamenti, che è una somma tra numeri decimali finiti.

2. Si calcolano le prime quattro somme.

$$s_1 = 7{,}2 + 4{,}3 = 11{,}5$$

$$s_2 = 7{,}24 + 4{,}37 = 11{,}61$$

$$s_3 = 7{,}248 + 4{,}376 = 11{,}624$$

$$s_4 = 7{,}2485 + 4{,}3766 = 11{,}6251$$

3. Si osserva come cambiano le cifre: la parte intera vale sempre 11; la prima cifra decimale vale 6 da s_2 in poi; la seconda cifra decimale vale 2 da s_3 in poi. Aumentando n le cifre già ottenute non cambiano più: si sono stabilizzate.

RISULTATO

Le cifre che si stabilizzano individuano il numero reale somma.

$$x + y = 11{,}62\ldots$$

I reali si rappresentano su una retta con un sistema di ascisse: $\mathbb{R}$ è in corrispondenza biunivoca con i punti della retta (rappresentazione geometrica).

Densità, intervalli e intorni

DEFINIZIONE

Teorema di densità. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Allora esistono infiniti numeri razionali r e infiniti irrazionali s tali che $a < r < b$ e $a < s < b$.

Ne segue che tra a e b esistono infiniti reali. I sottoinsiemi di questo tipo si chiamano intervalli.

TIPO	NOTAZIONE	DEFINIZIONE
Aperto	$]a, b[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
Chiuso	$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$
Semiaperto	$[a, b[$ e $]a, b]$	un estremo incluso, uno escluso
Semiretta non limitata superiormente	$]a, +\infty[$ e $[a, +\infty[$	$\{x \mid x > a\}$ e $\{x \mid x \ge a\}$
Semiretta non limitata inferiormente	$]-\infty, b[$ e $]-\infty, b]$	$\{x \mid x < b\}$ e $\{x \mid x \le b\}$

Si pone $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$ e con (a, b) si indica un intervallo generico. La lunghezza di un intervallo limitato è $b - a$, detta ampiezza. Un intervallo $]c - r, c + r[$, con $c \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, si chiama intorno di c di raggio r e si indica con $B(c, r)$ o $I_r(c)$. Il punto medio $c = (a + b)/2$ verifica $c - a = b - c = r$, quindi $(a, b) = (c - r, c + r)$.

ESEMPIO

Un intervallo come intorno. Scrivere l'intervallo $]-3, 7[$ come intorno di un punto c di raggio r.

1. Il centro c è il punto medio dell'intervallo, cioè la media degli estremi $a = -3$ e $b = 7$.

$$c = \frac{a+b}{2} = \frac{-3+7}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

2. Il raggio r è la distanza del centro da ciascun estremo, cioè metà dell'ampiezza.

$$r = c - a = 2 - (-3) = 5 \qquad r = b - c = 7 - 2 = 5$$

3. Si verifica che $]c - r, c + r[$ ritrova l'intervallo di partenza.

$$]2 - 5,\ 2 + 5[\ =\ ]-3,\ 7[$$

RISULTATO

$]-3, 7[= B(2, 5)$: intorno di centro 2 e raggio 5.

DA RICORDARE

Proprietà di Archimede: dati $a, b > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $na > b$. **Proprietà di separazione:** per $a \neq b$ esistono $r, s > 0$ con $B(a, r) \cap B(b, s) = \varnothing$.

Insiemi finiti, infiniti, numerabili

Due insiemi A e B non vuoti hanno la stessa potenza se esiste una corrispondenza biunivoca $f : A \to B$. Un insieme X è finito con n elementi se esiste una corrispondenza biunivoca con $\{1, \ldots, n\}$, infinito altrimenti.

Caratteristica degli insiemi infiniti è avere la stessa potenza di un loro sottoinsieme proprio: $\mathbb{N}$ e l'insieme P dei numeri pari si corrispondono con $n \mapsto 2n$. Un insieme è numerabile se ha la stessa potenza di $\mathbb{N}$; $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ sono numerabili.

Per $\mathbb{R}$ si prova che tutti gli intervalli hanno la stessa potenza, che questa è maggiore del numerabile, e che $\mathbb{R}$ ha la stessa potenza degli intervalli: si chiama potenza del continuo. Che $[0, 1]$ non sia numerabile si dimostra con l'argomento diagonale di Cantor.

ESEMPIO

Argomento diagonale di Cantor. L'intervallo $[0, 1]$ non è numerabile.

1. Si ragiona per assurdo: si suppone che $[0, 1]$ sia numerabile. Allora i suoi elementi si possono disporre in un elenco $x_1, x_2, x_3, \ldots$ e ciascuno si scrive con il suo allineamento decimale. Con a_{nk} si indica la cifra decimale di posto k del numero x_n.

$$x_1 = 0{,}a_{11}a_{12}a_{13}\ldots$$

$$x_2 = 0{,}a_{21}a_{22}a_{23}\ldots$$

$$x_3 = 0{,}a_{31}a_{32}a_{33}\ldots$$

2. Si guarda la diagonale dell'elenco, cioè le cifre $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots$ che stanno sulla posizione n del numero x_n.

3. Si costruisce un nuovo numero $y = 0{,}c_1c_2c_3\ldots$ scegliendo ogni cifra c_k diversa dalla cifra diagonale a_{kk}: per esempio $c_k = 5$ se $a_{kk} \neq 5$, e $c_k = 6$ se $a_{kk} = 5$. Usare solo le cifre 5 e 6 evita le doppie rappresentazioni come $0{,}4999\ldots = 0{,}5000\ldots$.

$$c_k \neq a_{kk} \quad \text{per ogni } k$$

4. Il numero y appartiene a $[0, 1]$, ma è diverso da ogni x_n: differisce da x_n almeno nella cifra di posto n, perché $c_n \neq a_{nn}$.

$$y \in [0, 1] \qquad y \neq x_n \ \text{ per ogni } n$$

RISULTATO

Si è trovato un elemento di [0, 1] che non compare nell'elenco: l'ipotesi è assurda, quindi [0, 1] non è numerabile.

Valore assoluto

DEFINIZIONE

Valore assoluto. $|x| = x$ se $x \geq 0$ e $|x| = -x$ se $x < 0$. Rappresenta la distanza di x dall'origine, e $|a - b|$ la distanza tra a e b, cioè l'ampiezza dell'intervallo di estremi a e b.

PROPRIETÀ	ENUNCIATO
Positività	$\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$; $\|x\| = \max(x, -x)$
Simmetria	$\|-x\| = \|x\|$; $-\|x\| \leq x \leq \|x\|$
Prodotto e reciproco	$\|xy\| = \|x\|\,\|y\|$; $\|1/a\| = 1/\|a\|$ per $a \neq 0$
Disuguaglianza triangolare	$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$; $\|a - b\| \leq \|a\| + \|b\|$
Intervalli	$\|x\| < a$ (con $a > 0$) se e solo se $-a < x < a$
Ampiezza	se $a < x < b$ e $a < y < b$ allora $\|x - y\| < b - a$
Annullamento	se $\|x\| < \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$ allora $x = 0$

Estremo inferiore ed estremo superiore

Un insieme numerico è un sottoinsieme non vuoto $X \subseteq \mathbb{R}$.

DEFINIZIONE

Massimo e minimo. $M \in X$ è il massimo di X se $M \geq x$ per ogni $x \in X$; $m \in X$ è il minimo se $m \leq x$ per ogni $x \in X$. Se esistono sono unici: se M_1 e M_2 fossero due massimi, $M_1 \geq M_2$ e $M_2 \geq M_1$ danno $M_1 = M_2$.

DEFINIZIONE

Maggiorante e minorante. $k \in \mathbb{R}$ è un maggiorante di X se $k \geq x$ per ogni $x \in X$; h è un minorante se $h \leq x$ per ogni $x \in X$. Si indicano con $\mathrm{Mag}(X)$ e $\mathrm{Min}(X)$ gli insiemi dei maggioranti e dei minoranti rispettivamente. X è limitato superiormente (inferiormente) se ha maggioranti (minoranti), limitato se è limitato da entrambe le parti, cioè se esiste $M > 0$ con $|x| \leq M$ per ogni $x \in X$, equivalentemente se è contenuto in un intervallo.

Osservazioni: se k è un maggiorante, lo sono tutti i $k' > k$, quindi i maggioranti sono infiniti; k non è un maggiorante se esiste $x \in X$ con $x > k$; l'insieme dei maggioranti è vuoto se per ogni k esiste $x \in X$ con $x > k$. Se esiste il massimo di X, esso è un maggiorante di X.

DEFINIZIONE

Teorema. Se X è limitato superiormente, l'insieme dei maggioranti ha un minimo; se X è limitato inferiormente, l'insieme dei minoranti ha un massimo.

DEFINIZIONE

Estremi. Se X è limitato superiormente, $\sup X = \min \mathrm{Mag}(X)$ (estremo superiore); se non lo è, $\sup X = +\infty$. Se X è limitato inferiormente, $\inf X = \max \mathrm{Min}(X)$ (estremo inferiore); altrimenti $\inf X = -\infty$. Per convenzione $\sup \varnothing = -\infty$.

CARATTERIZZAZIONE CON E

Un numero $L \in \mathbb{R}$ è l'estremo superiore di X se e solo se valgono due condizioni:

- $L \geq x$ per ogni $x \in X$ (L è un maggiorante);
- per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x \in X$ tale che $x > L - \varepsilon$ (nessun numero minore di L è un maggiorante).

Analogamente $l \in \mathbb{R}$ è l'estremo inferiore se e solo se $l \leq x$ per ogni $x \in X$ e, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $x \in X$ con $x < l + \varepsilon$. Se esiste il massimo M, allora $\sup X = M$; se $\sup X \in X$, allora $\sup X = \max X$. In generale $\sup X$ può non appartenere a X: per $X = [0, 1[$ si ha $\sup X = 1$ e non esiste il massimo.

INSIEME	INF	SUP	MINIMO E MASSIMO
$]a, b[$	a	b	non esistono
$[a, b[$	a	b	min = a, nessun massimo
$\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$	0	1	max = 1, nessun minimo
$\{-1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$	−1	0	min = −1, nessun massimo
$\{(-1)^n\, n/(n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$	−1	1	nessuno dei due
$]0, 1[\cup \{3\}$	0	3	max = 3, nessun minimo
$\{x \in \mathbb{R} \mid \lvert x + 2\rvert < 3\}$	−5	1	nessuno dei due

ESEMPIO

Estremi di un insieme di frazioni. Determinare inf, sup, minimo e massimo di $X = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

1. Si scrivono i primi elementi per vedere come si comporta l'insieme: sono positivi e decrescono.

$$X = \left\{1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{4},\ \dots\right\}$$

2. Estremo superiore. Ogni elemento è minore o uguale a 1, quindi 1 è un maggiorante. Inoltre $1 = a_1$ appartiene a X: un maggiorante che appartiene all'insieme è il massimo.

$$\tfrac{1}{n} \leq 1 \ \text{ per ogni } n \ \Rightarrow\ \max X = \sup X = 1$$

3. Estremo inferiore. Tutti gli elementi sono positivi, quindi 0 è un minorante. Per vedere che è il più grande dei minoranti si usa la caratterizzazione con ε: dato $\varepsilon > 0$ si cerca un elemento minore di $0 + \varepsilon$. Basta prendere $n > 1/\varepsilon$ (proprietà di Archimede).

$$n > \tfrac{1}{\varepsilon} \ \Rightarrow\ \tfrac{1}{n} < \varepsilon$$

4. Nessun numero positivo è un minorante, quindi $\inf X = 0$. Poiché $1/n$ non è mai uguale a 0, lo zero non appartiene a X e non esiste il minimo.

RISULTATO

inf $X = 0$ (non è minimo), sup $X = \max X = 1$.

ESEMPIO

Estremi di una successione con segno alterno. Determinare gli estremi di $X = \{(-1)^n\, n/(n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

1. Si calcolano i primi elementi. Gli indici dispari danno numeri negativi, quelli pari numeri positivi.

$$-\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ -\frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ -\frac{5}{6},\ \frac{6}{7},\ \dots$$

2. Si separano i due gruppi. Per n pari i termini $2/3 < 4/5 < 6/7 < \dots$ sono crescenti e si avvicinano a 1 dal basso. Per n dispari i termini $-1/2 > -3/4 > -5/6 > \dots$ sono decrescenti e si avvicinano a -1 dall'alto.

3. Ogni termine ha valore assoluto minore di 1, perché $n < n+1$. Quindi -1 è un minorante e 1 è un maggiorante.

$$\left|(-1)^n \frac{n}{n+1}\right| = \frac{n}{n+1} < 1 \ \Rightarrow\ -1 < a_n < 1$$

4. Si verifica con ε che 1 è il più piccolo dei maggioranti: dato $\varepsilon > 0$ si cerca un termine di posto pari maggiore di $1-\varepsilon$. Si ha $1 - n/(n+1) = 1/(n+1)$, quindi la condizione è $1/(n+1) < \varepsilon$, cioè $n > 1/\varepsilon - 1$. Si ragiona allo stesso modo per -1 con n dispari.

$$1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

5. Né 1 né -1 sono assunti da un termine (le frazioni $n/(n+1)$ sono sempre minori di 1 in valore assoluto): non esistono né minimo né massimo.

RISULTATO

inf $X = -1$, sup $X = 1$, senza minimo né massimo.

INSIEMI DEFINITI DA DISEQUAZIONI

Quando l'insieme è descritto da una condizione, si risolve prima la disequazione per scrivere l'insieme come unione di intervalli, e poi si leggono gli estremi.

ESEMPIO

Una disuguaglianza con valore assoluto. Determinare inf e sup di $X = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+2| < 3\}$.

1. Si usa la proprietà $|t| < a \Leftrightarrow -a < t < a$ (con $a > 0$), qui con $t = x+2$ e $a = 3$.

$$-3 < x + 2 < 3$$

2. Si sottrae 2 da tutti e tre i membri.

$$-3 - 2 < x < 3 - 2$$

$$-5 < x < 1$$

3. L'insieme è l'intervallo aperto $]-5, 1[$: gli estremi non gli appartengono.

RISULTATO

inf $X = -5$ e sup $X = 1$, senza minimo né massimo.

ESEMPIO

Disequazione con valore assoluto e numeri irrazionali. Determinare gli estremi di $X = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \mid x^2 - |x| \leq 0\}$.

1. Compare $|x|$, quindi si distinguono due casi secondo il segno di x.
2. Caso $x \geq 0$. Qui $|x| = x$ e la disequazione diventa $x^2 - x \leq 0$. Si raccoglie x: il prodotto è minore o uguale a zero tra le due radici 0 e 1.

$$x(x-1) \leq 0 \;\Rightarrow\; 0 \leq x \leq 1$$

3. Caso $x < 0$. Qui $|x| = -x$ e la disequazione diventa $x^2 + x \leq 0$. Si raccoglie x: le radici sono -1 e 0, e si tengono solo i valori negativi.

$$x(x+1) \leq 0 \;\Rightarrow\; -1 \leq x \leq 0 \;\text{ con } x<0 \;\Rightarrow\; -1 \leq x < 0$$

4. Unendo i due casi le soluzioni reali sono i numeri tra -1 e 1. L'insieme X contiene però solo gli irrazionali di questo intervallo.

$$X = [-1, 1] \setminus \mathbb{Q}$$

5. Gli estremi -1 e 1 sono limiti dell'insieme, perché gli irrazionali sono densi e si avvicinano quanto si vuole a ± 1. Ma -1 e 1 sono razionali, quindi non appartengono a X.

RISULTATO

$\inf X = -1$ non è un minimo e $\sup X = 1$ non è un massimo. Nell'insieme analogo contenuto in $\mathbb{Q}$ si avrebbe invece $\min = -1$ e $\max = 1$.

ESEMPIO

Valore assoluto annidato. Determinare gli estremi di $X = \{x \in \mathbb{R} \mid ||x - 1| - 2x| < x + 3\}$.

1. Si elimina il valore assoluto più interno, $|x - 1|$, distinguendo i casi $x \geq 1$ e $x < 1$.
2. Caso $x \geq 1$. Qui $|x - 1| = x - 1$, quindi l'espressione dentro il valore assoluto esterno è $x - 1 - 2x = -x - 1$, che è negativa. Il suo valore assoluto è $x + 1$.

$$|x - 1 - 2x| = |-x - 1| = x + 1$$

3. La disequazione diventa $x + 1 < x + 3$, cioè $1 < 3$, sempre vera: ogni $x \geq 1$ è una soluzione.

$$x + 1 < x + 3 \iff 1 < 3$$

4. Caso $x < 1$. Qui $|x - 1| = 1 - x$, quindi l'espressione interna è $1 - x - 2x = 1 - 3x$ e la disequazione è $|1 - 3x| < x + 3$. Si toglie il valore assoluto con $|t| < b \;\Leftrightarrow\; -b < t < b$.

$$-(x+3) < 1 - 3x < x + 3$$

5. Si risolvono separatamente le due disuguaglianze. Da destra: $1 - 3x < x + 3$ dà $-2 < 4x$, cioè $x > -1/2$. Da sinistra: $-x - 3 < 1 - 3x$ dà $2x < 4$, cioè $x < 2$, sempre vera per $x < 1$.

$$1 - 3x < x + 3 \;\Rightarrow\; x > -\tfrac{1}{2}$$

$$-x - 3 < 1 - 3x \;\Rightarrow\; x < 2$$

6. Per $x < 1$ le soluzioni sono quindi $-1/2 < x < 1$. Si uniscono i due casi.

$$X = \left]-\tfrac{1}{2},\, 1\right[\,\cup\, [1,\, +\infty[\;=\; \left]-\tfrac{1}{2},\; +\infty\right[$$

RISULTATO

inf $X = -1/2$ (non è un minimo) e sup $X = +\infty$.

Elementi di topologia della retta

DEFINIZIONE

Punti interni, di frontiera, di accumulazione. Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$. c è interno a X se esiste $r > 0$ con $]c - r, c + r[\subseteq X$; l'insieme dei punti interni è $\text{int}(X)$. c è di frontiera se ogni intorno di c contiene punti di X e punti di $\mathbb{R} \setminus X$; l'insieme è $F(X)$. c è di accumulazione per X se ogni intorno di c contiene almeno un punto di X diverso da c; l'insieme dei punti di accumulazione è il derivato $D(X)$. Un punto di X che non sia di accumulazione è detto isolato.

DEFINIZIONE

Aperti e chiusi. X è aperto se è vuoto o se tutti i suoi punti sono interni ($X = \text{int } X$). X è chiuso se $\mathbb{R} \setminus X$ è aperto. La chiusura di X è $\text{cl}(X) = X \cup D(X) = X \cup F(X)$; X è chiuso se e solo se $X = \text{cl}(X)$. X è denso in $\mathbb{R}$ se $\text{cl}(X) = \mathbb{R}$.

INSIEME	INT	D	F	CHIUSURA
$]a, b[$	$]a, b[$	$[a, b]$	$\{a, b\}$	$[a, b]$
$[a, b]$	$]a, b[$	$[a, b]$	$\{a, b\}$	$[a, b]$
$\mathbb{N}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}$
$\mathbb{Q}$	$\varnothing$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$	$\varnothing$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$(a, b) \cap \mathbb{Q}$	$\varnothing$	$[a, b]$	$[a, b]$	$[a, b]$
$[0, 1] \cup \{4\}$	$]0, 1[$	$[0, 1]$	$\{0, 1, 4\}$	$[0, 1] \cup \{4\}$

RELAZIONI TRA I VARI TIPI DI PUNTI

- Un punto interno è di accumulazione, e di frontiera mai; ma un punto di accumulazione può essere di frontiera (gli estremi di un intervallo).
- Un punto di frontiera può non essere di accumulazione: per $X = [0, 1] \cup \{4\}$, il punto 4 è di frontiera e isolato.
- Se $c \in D(X)$ ogni intorno di c contiene infiniti punti di X: un insieme finito non ha punti di accumulazione.
- $\varnothing$ e $\mathbb{R}$ sono sia aperti sia chiusi (e sono i soli insiemi con questa proprietà); per $\mathbb{N}$ si ha $D(\mathbb{N}) = \varnothing$ e $F(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$.
- Per la densità di $\mathbb{Q}$ e di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, ogni reale è di accumulazione per entrambi: $\text{cl}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

ESERCIZI TIPICI

Per determinare tutti gli insiemi collegati a X conviene un ordine fisso: prima l'interno, poi il derivato, poi la chiusura e la frontiera, infine estremo inferiore e superiore. La frontiera si ricava dalla relazione $F(X) = \text{cl}(X) \setminus \text{int}(X)$.

ESEMPIO

Unione di intervallo, razionali e naturali. Determinare int X, $D(X)$, cl(X), $F(X)$, inf X e sup X per $X =]-\infty, -4] \cup (]-2, -1[\cap \mathbb{Q}) \cup \mathbb{N}$.

1. Si scompone X in tre parti: un intervallo $A =]-\infty, -4]$; i razionali B dell'intervallo $]-2, -1[$; i naturali $C = \mathbb{N}$, che sono punti isolati.
2. Punti interni. In A lo sono tutti tranne -4: ogni intorno di -4 contiene punti maggiori di -4, che non stanno in X. In B nessuno: ogni intervallo contiene irrazionali, che non appartengono a X. In C nessuno, perché sono isolati.
$$\operatorname{int} X =]-\infty, -4[$$
3. Punti di accumulazione. Da A vengono tutti i punti di $]-\infty, -4]$, compreso -4. Da B vengono tutti i punti di $[-2, -1]$ (anche gli estremi), perché i razionali sono densi. I naturali non ne danno: un intorno di raggio 1/2 di un naturale contiene solo quel naturale.
$$D(X) =]-\infty, -4] \cup [-2, -1]$$
4. Chiusura. Si aggiungono a X i punti di accumulazione: gli irrazionali di $[-2, -1]$ (non contenuti in X) entrano, i naturali c'erano già.
$$\operatorname{cl} X = X \cup D(X) =]-\infty, -4] \cup [-2, -1] \cup \mathbb{N}$$
5. Frontiera. Si toglie dalla chiusura l'interno.
$$F(X) = \operatorname{cl} X \setminus \operatorname{int} X = \{-4\} \cup [-2, -1] \cup \mathbb{N}$$
6. Estremi. X contiene una semiretta verso sinistra, quindi non è limitato inferiormente; contiene tutti i naturali, quindi non è limitato superiormente.
$$\inf X = -\infty \qquad \sup X = +\infty$$

ESEMPIO

Irrazionali e razionali in due intervalli. Determinare gli stessi insiemi per $X = ([-3, 0] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) \cup ([2, 4] \cap \mathbb{Q})$.

1. Si scompone X: A è formato dagli irrazionali di $[-3, 0]$ e B dai razionali di $[2, 4]$.
2. Punti interni. Ogni intervallo contiene sia razionali sia irrazionali, quindi nessun intervallo può essere contenuto in X.
$$\operatorname{int} X = \varnothing$$
3. Punti di accumulazione e chiusura. Per la densità, ogni punto di $[-3, 0]$ è limite di irrazionali e ogni punto di $[2, 4]$ è limite di razionali. Nessun punto di X è isolato, quindi derivato e chiusura coincidono.
$$D(X) = \operatorname{cl} X = [-3, 0] \cup [2, 4]$$
4. Frontiera. Essendo vuoto l'interno, la frontiera coincide con la chiusura.
$$F(X) = \operatorname{cl} X \setminus \varnothing = [-3, 0] \cup [2, 4]$$
5. Estremi. Tutti i punti di X sono compresi tra -3 e 4. L'estremo inferiore è -3, ma -3 è razionale e non appartiene a X: non è un minimo. L'estremo superiore è 4 e 4 è razionale e sta in $[2, 4]$: appartiene a X, quindi è il massimo.
$$\inf X = -3 \ \text{(non minimo)} \qquad \sup X = 4 = \max X$$

Potenze, radici e logaritmi

Per $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}_0$ si pone $a^0 = 1$ e $a^{n+1} = a^n \cdot a$; per $a \neq 0$, $a^{-n} = 1/a^n$.

DEFINIZIONE

Teorema della radice ennesima aritmetica. Siano $a > 0$ e $n \geq 2$ un naturale. Esiste uno e un solo numero positivo b con $b^n = a$. Si chiama radice ennesima aritmetica di a e si indica con $\sqrt[n]{a}$.

Grazie al teorema, per $a > 0$ si definisce $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ e $a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m$; per un esponente irrazionale s si definisce a^s per stabilizzazione. Le potenze sono sempre positive; se $a > 1$ si ha $a^b > 1$ se e solo se $b > 0$, se $0 < a < 1$ si ha $a^b > 1$ se e solo se $b < 0$.

L'EQUAZIONE BINOMIA

Con $n \geq 2$ si discute il numero di soluzioni reali di $x^n = a$, al variare di a:

CASO	N PARI	N DISPARI
$a > 0$	due soluzioni, $\pm \sqrt[n]{a}$	una soluzione, $\sqrt[n]{a}$
$a = 0$	una soluzione, $x = 0$	una soluzione, $x = 0$
$a < 0$	nessuna soluzione	una soluzione, $-\sqrt[n]{(-a)}$

Così si estende la radice: $\sqrt[n]{0} = 0$ e, per n dispari, $\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{(-x)}$ se $x < 0$.

ESEMPIO

Radice cubica di un numero negativo. Calcolare $\sqrt[3]{(-27)}$.

1. L'indice 3 è dispari, quindi la radice esiste anche per radicando negativo: si usa $\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{(-x)}$.
$$\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27}$$
2. Si cerca il numero positivo il cui cubo è 27: è 3, perché $3^3 = 27$.
$$\sqrt[3]{27} = 3$$

RISULTATO

$\sqrt[3]{(-27)} = -3$.

DEFINIZIONE

Logaritmo. Siano $a, b > 0$ con $a \neq 1$. L'equazione $a^x = b$ ha una e una sola soluzione, detta logaritmo di b in base a e indicata con $\log_a b$; vale $a^{\log_a b} = b$.

PROPRIETÀ	FORMULA
Valori notevoli	$\log_a a = 1$, $\log_a 1 = 0$
Prodotto e quoziente	$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$, $\log_a(b/c) = \log_a b - \log_a c$
Potenza	$\log_a(b^x) = x \log_a b$
Cambio di base	$\log_a b = (\log_a c)(\log_c b)$; in particolare $\log_b a = 1/\log_a b$

PROPRIETÀ	FORMULA
Segno	$\log_a b > 0$ se e solo se a e b sono entrambi maggiori di 1 o entrambi minori di 1

Con base e il logaritmo si indica con $\log x$ (o $\ln x$).

ESEMPIO

Logaritmi con base minore di 1. Calcolare $\log_{1/2} 4$ e $\log_{1/4}(1/4)$.

1. Per $\log_{1/2} 4$ si cerca l'esponente x tale che $(1/2)^x = 4$. Si scrivono entrambi i membri come potenze di 2: $1/2 = 2^{-1}$ e $4 = 2^2$.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4 \iff 2^{-x} = 2^2$$

2. Due potenze di 2 sono uguali se hanno lo stesso esponente.

$$-x = 2 \Rightarrow x = -2$$

3. Per $\log_{1/4}(1/4)$ non serve alcun calcolo: il logaritmo di un numero nella sua stessa base vale 1, perché $\log_a a = 1$.

$$\log_{1/4} \frac{1}{4} = 1$$

RISULTATO

$\log_{1/2} 4 = -2$ e $\log_{1/4}(1/4) = 1$.

Numeri complessi

DEFINIZIONE

Numero complesso. Un numero complesso è una coppia ordinata $z = (a, b)$ di reali. $\mathbb{C}$ è l'insieme dei complessi; $z = w$ se hanno le stesse componenti; per $z \neq w$ non si definisce alcun ordine. Si rappresenta con il punto del piano di coordinate (a, b). Se $b = 0$ il numero è reale, se $b \neq 0$ immaginario, se $a = 0$ e $b \neq 0$ immaginario puro.

Si pongono $0 = (0, 0)$, $1 = (1, 0)$, $i = (0, 1)$ (unità immaginaria). Per $z = (a, b)$ e $w = (c, d)$:

NOZIONE	DEFINIZIONE
Opposto	$-z = (-a, -b)$
Coniugato	$z^* = (a, -b)$, in molti testi indicato con una barra sopra z
Modulo	$\lvert z\rvert = \sqrt{(a^2 + b^2)}$, distanza dall'origine del punto immagine
Somma	$z + w = (a + c, b + d)$
Prodotto	$zw = (ac - bd, ad + bc)$

Valgono le proprietà commutativa, associativa e distributiva; $z + (-z) = 0$, $z \cdot 1 = z$, $z\,z^* = |z|^2$. Il prodotto non è definito componente per componente, altrimenti $(1, 0)(0, 1) = (0, 0)$ violerebbe la legge di annullamento del prodotto. Associando a ogni reale a il complesso reale $(a, 0)$ si ottiene una corrispondenza biunivoca che conserva le operazioni: $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, e per a reale $|(a, 0)| = |a|$.

ESEMPIO

L'unità immaginaria al quadrato. Si ricava i^2 dalla definizione di prodotto.

1. Si applica la regola $zw = (ac - bd, ad + bc)$ con $z = w = i = (0, 1)$, cioè $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$, $d = 1$.
$$(0,1)(0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1,\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0)$$
2. Si calcolano le due componenti.
$$= (-1,\ 0)$$
3. Il complesso $(-1, 0)$ è il numero reale -1.

RISULTATO

$i^2 = -1$.

FORMA ALGEBRICA

Poiché $(a, b) = (a, 0) + (0, 1)(b, 0)$, si scrive $z = a + ib$: $a = \text{Re}\, z$ è la parte reale e $b = \text{Im}\, z$ la parte immaginaria. Nei calcoli z si tratta come un polinomio in i con $i^2 = -1$; per il quoziente si moltiplicano numeratore e denominatore per il coniugato del denominatore.

ESEMPIO

Quoziente di due complessi. Scrivere in forma algebrica $(2 + 5i)/(3i - 1)$.

1. Si riordina il denominatore come $-1 + 3i$ e si moltiplicano numeratore e denominatore per il suo coniugato $-1 - 3i$. In questo modo il denominatore diventa un numero reale.
$$\frac{2+5i}{-1+3i} = \frac{(2+5i)(-1-3i)}{(-1+3i)(-1-3i)}$$
2. Numeratore. Si moltiplica ogni termine della prima parentesi per ogni termine della seconda e si usa $i^2 = -1$.
$$(2+5i)(-1-3i) = -2 - 6i - 5i - 15i^2 = -2 - 11i + 15 = 13 - 11i$$
3. Denominatore. È il prodotto di un numero per il suo coniugato, cioè la somma dei quadrati delle due componenti.
$$(-1+3i)(-1-3i) = (-1)^2 - (3i)^2 = 1 + 9 = 10$$
4. Si dividono le due parti per 10.
$$\frac{13-11i}{10} = \frac{13}{10} - \frac{11}{10}\,i$$

RISULTATO

$(2 + 5i)/(3i - 1) = 13/10 - (11/10)\, i$.

Le potenze di i sono periodiche di periodo 4: $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$. Per calcolare i^n basta dividere n per 4 e guardare il resto: per esempio $27 = 4 \cdot 6 + 3$, quindi $i^{27} = i^3 = -i$.

FORMA TRIGONOMETRICA

Sia $z = a + ib \neq 0$ e $P = (a, b)$. Gli argomenti di z sono i numeri $\alpha + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, dove α è la misura in radianti dell'angolo di cui deve ruotare il semiasse positivo delle ascisse per sovrapporsi alla semiretta OP. Detto $\alpha = \arg z$:

$$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha), \qquad a = |z|\cos\alpha, \qquad b = |z|\sin\alpha$$

Due numeri in forma trigonometrica sono uguali se e solo se hanno lo stesso modulo e argomenti che differiscono per $2k\pi$. Dalle formule di addizione di seno e coseno si ottiene il prodotto: $|zw| = |z||w|$ e $\arg(zw) = \arg z + \arg w$; analogamente per il quoziente $|z/w| = |z|/|w|$ e $\arg(z/w) = \arg z - \arg w$. Per z reale: $\arg z = 0$ se $z > 0$ e $\arg z = \pi$ se $z < 0$; per $z = ib$: $\arg z = \pi/2$ se $b > 0$ e $-\pi/2$ se $b < 0$.

Per passare dalla forma algebrica a quella trigonometrica si calcolano il modulo $|z| = \sqrt{(a^2 + b^2)}$ e l'angolo α con $\cos\alpha = a/|z|$ e $\sin\alpha = b/|z|$.

ESEMPIO

Dalla forma algebrica a quella trigonometrica. Scrivere $z = 1 + i$ in forma trigonometrica.

1. Si calcola il modulo con $a = 1$ e $b = 1$.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

2. Si calcolano seno e coseno dell'argomento.

$$\cos\alpha = \frac{a}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \sin\alpha = \frac{b}{|z|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3. L'angolo del primo quadrante con seno e coseno uguali a $\sqrt{2}/2$ è $\pi/4$.

$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

RISULTATO

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

DEFINIZIONE

Formula di Moivre. Per $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ e $n \in \mathbb{Z}$: $z^n = |z|^n(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha))$.

ESEMPIO

Potenza di un complesso con Moivre. Calcolare $(1 + i)^8$.

1. Si scrive $1 + i$ in forma trigonometrica, come nell'esempio precedente: modulo $\sqrt{2}$ e argomento $\pi/4$.

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

2. Si applica la formula di Moivre con $n = 8$: il modulo si eleva alla 8 e l'argomento si moltiplica per 8.

$$(1 + i)^8 = (\sqrt{2})^8\left(\cos\frac{8\pi}{4} + i\sin\frac{8\pi}{4}\right) = 16\,(\cos 2\pi + i\sin 2\pi)$$

3. Si ricorda che $\cos 2\pi = 1$ e $\sin 2\pi = 0$.

$$16\,(1 + i \cdot 0) = 16$$

RISULTATO

$(1 + i)^8 = 16$.

RADICI ENNESIME

Dati $z \in \mathbb{C}$ e $n \geq 2$, un complesso w con $w^n = z$ è una radice ennesima di z. Se $z = 0$ l'unica radice è 0. Se $z \neq 0$, scrivendo $w = |w|(\cos\beta + i\sin\beta)$ e usando Moivre, $w^n = z$ equivale a $|w|^n = |z|$ e $n\beta = \alpha + 2k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$. Dunque le radici sono:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Sono esattamente n radici distinte (per altri valori di k si ripetono); stanno sulla circonferenza di raggio $\sqrt[n]{|z|}$ e sono vertici di un poligono regolare di n lati. Le eventuali radici reali sono fra queste. Il procedimento è sempre lo stesso: si scrive z in forma trigonometrica, si calcola il raggio $\sqrt[n]{|z|}$, si calcola l'argomento $(\alpha + 2k\pi)/n$ per $k = 0, \ldots, n-1$.

ESEMPIO

Radici quarte di 16. Trovare le soluzioni complesse di $w^4 = 16$.

1. Si scrive 16 in forma trigonometrica: è un reale positivo, quindi modulo 16 e argomento 0.
$$16 = 16(\cos 0 + i\sin 0)$$
2. Il raggio comune delle radici è la radice quarta del modulo.
$$\sqrt[4]{16} = 2$$
3. Gli argomenti sono $(0 + 2k\pi)/4 = k\pi/2$ per $k = 0, 1, 2, 3$.
$$w_k = 2\left(\cos\frac{k\pi}{2} + i\sin\frac{k\pi}{2}\right)$$
4. Si sostituiscono i quattro valori di k.
$$w_0 = 2(\cos 0 + i\sin 0) = 2$$
$$w_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i$$
$$w_2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2$$
$$w_3 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2i$$

RISULTATO

Le radici sono 2, $2i$, -2, $-2i$: i vertici di un quadrato inscritto nella circonferenza di raggio 2.

ESEMPIO

Radici cubiche di 8. Trovare le soluzioni complesse di $w^3 = 8$.

1. Modulo 8, argomento 0. Il raggio è $\sqrt[3]{8} = 2$ e gli argomenti sono $2k\pi/3$ per $k = 0, 1, 2$.
$$w_k = 2\left(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}\right)$$
2. Per $k = 0$ si ottiene la radice reale.
$$w_0 = 2(\cos 0 + i\sin 0) = 2$$
3. Per $k = 1$ si usano $\cos(2\pi/3) = -1/2$ e $\sin(2\pi/3) = \sqrt{3}/2$.
$$w_1 = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3}$$

4. Per $k = 2$ si usano $\cos(4\pi/3) = -1/2$ e $\sin(4\pi/3) = -\sqrt{3}/2$.

$$w_2 = 2\left(-\tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3}$$

RISULTATO

Le radici cubiche di 8 sono 2, $-1 + i\sqrt{3}$ e $-1 - i\sqrt{3}$.

ESEMPIO

Radici quadrate di 16 e di −16. Trovare le soluzioni di $w^2 = 16$ e di $w^2 = -16$.

1. Per $z = 16$ il modulo è 16 e l'argomento è 0. Con $n = 2$ il raggio è $\sqrt{16} = 4$ e gli argomenti sono 0 e π.

$$w_0 = 4(\cos 0 + i\sin 0) = 4, \qquad w_1 = 4(\cos\pi + i\sin\pi) = -4$$

2. Per $z = -16$ il modulo è ancora 16, ma l'argomento è π (un reale negativo). Il raggio è 4 e gli argomenti sono $\pi/2$ e $\pi/2 + \pi$.

$$w_0 = 4\left(\cos\tfrac{\pi}{2} + i\sin\tfrac{\pi}{2}\right) = 4i$$

$$w_1 = 4\left(\cos\tfrac{3\pi}{2} + i\sin\tfrac{3\pi}{2}\right) = -4i$$

RISULTATO

Le radici quadrate di 16 sono 4 e −4; quelle di −16 sono $4i$ e $-4i$.

ESEMPIO

Radici quarte di *i*. Trovare le soluzioni di $w^4 = i$.

1. L'unità immaginaria ha modulo 1 e argomento $\pi/2$.

$$i = 1 \cdot \left(\cos\tfrac{\pi}{2} + i\sin\tfrac{\pi}{2}\right)$$

2. Il raggio è $\sqrt[4]{1} = 1$. Gli argomenti sono $(\pi/2 + 2k\pi)/4 = \pi/8 + k\pi/2$ per $k = 0, 1, 2, 3$.

$$\beta_k = \tfrac{\pi}{8} + \tfrac{k\pi}{2}$$

3. Si sostituiscono i valori di k, sommando ogni volta $\pi/2 = 4\pi/8$.

$$\beta_0 = \tfrac{\pi}{8}, \quad \beta_1 = \tfrac{5\pi}{8}, \quad \beta_2 = \tfrac{9\pi}{8}, \quad \beta_3 = \tfrac{13\pi}{8}$$

RISULTATO

Le quattro radici hanno modulo 1 e argomenti $\pi/8$, $5\pi/8$, $9\pi/8$, $13\pi/8$.

ESEMPIO

Radici cubiche di 1 + *i*. Trovare le soluzioni di $w^3 = 1 + i$.

1. Dall'esempio precedente $1 + i$ ha modulo $\sqrt{2}$ e argomento $\pi/4$.
2. Il raggio è la radice cubica di $\sqrt{2} = 2^{1/2}$, cioè $2^{1/6}$.

$$\sqrt[3]{\sqrt{2}} = 2^{1/6} = \sqrt[6]{2}$$

3. Gli argomenti sono $(\pi/4 + 2k\pi)/3 = \pi/12 + 2k\pi/3$ per $k = 0, 1, 2$.

$$\beta_k = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} = \frac{\pi}{12} + \frac{8k\pi}{12}$$

4. Si sostituiscono i valori di k.

$$\beta_0 = \frac{\pi}{12}, \quad \beta_1 = \frac{9\pi}{12}, \quad \beta_2 = \frac{17\pi}{12}$$

RISULTATO

Le tre radici hanno modulo $\sqrt[6]{2}$ e argomenti $\pi/12$, $9\pi/12$, $17\pi/12$.

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Per $n = 2$ le due radici sono opposte: $w_0 = \sqrt{|z|}\,(\cos(\alpha/2) + i\sin(\alpha/2))$ e $w_1 = -w_0$. Per a reale negativo $\sqrt{a} = \pm i\sqrt{(-a)}$; ad esempio $\sqrt{(-4)} = \pm 2i$. Questo permette di risolvere le equazioni di secondo grado a coefficienti reali con discriminante negativo. La formula risolutiva $z = (-b \pm \sqrt{\Delta})/(2a)$ vale anche con coefficienti complessi.

ESEMPIO

Discriminante negativo. Risolvere $z^2 + z + 4 = 0$.

1. Si calcola il discriminante con $a = 1$, $b = 1$, $c = 4$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 16 = -15$$

2. Il discriminante è negativo: $\sqrt{(-15)} = \pm i\sqrt{15}$.

$$\sqrt{\Delta} = \pm i\sqrt{15}$$

3. Si sostituisce nella formula risolutiva.

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm i\sqrt{15}}{2}$$

RISULTATO

$z = (-1 + i\sqrt{15})/2$ oppure $z = (-1 - i\sqrt{15})/2$: le due soluzioni sono coniugate.

ESEMPIO

Coefficienti complessi. Risolvere $iz^2 + 2z - 2i = 0$.

1. I coefficienti sono $a = i$, $b = 2$, $c = -2i$. Si calcola il discriminante, usando $i^2 = -1$.

$$4ac = 4 \cdot i \cdot (-2i) = -8i^2 = 8$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 8 = -4$$

2. La radice del discriminante è $\sqrt{(-4)} = \pm 2i$. Si sostituisce nella formula risolutiva.

$$z = \frac{-2 \pm 2i}{2i} = \frac{-1 \pm i}{i}$$

3. Si divide per i ricordando che $1/i = -i$ (infatti $i \cdot (-i) = 1$).

$$\frac{-1}{i} = (-1)(-i) = i, \qquad \frac{\pm i}{i} = \pm 1$$

4. Si sommano i due contributi.

$$z = i \pm 1$$

RISULTATO

Le soluzioni sono $z = 1 + i$ e $z = -1 + i$.

ESEMPIO

Soluzioni non coniugate. Risolvere $z^2 - 2iz + 4 = 0$.

1. Con $a = 1$, $b = -2i$, $c = 4$ si calcola il discriminante.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2i)^2 - 16 = -4 - 16 = -20$$

2. Si scrive $\sqrt{(-20)} = \pm i\sqrt{20} = \pm 2i\sqrt{5}$ e si sostituisce.

$$z = \frac{2i \pm 2i\sqrt{5}}{2} = i(1 \pm \sqrt{5})$$

RISULTATO

$z = i(1 + \sqrt{5})$ e $z = i(1 - \sqrt{5})$. Le soluzioni non sono coniugate, perché i coefficienti dell'equazione non sono tutti reali.

EQUAZIONI NEL CAMPO COMPLESSO

Per le equazioni in cui compaiono z, z^* e $|z|$ si hanno due metodi. Con la forma algebrica si pone $z = x + iy$, si sviluppa e si impone che parte reale e parte immaginaria siano uguali nei due membri, ottenendo un sistema reale. Con la fattorizzazione si usa $z\,z^* = |z|^2$ per raccogliere.

ESEMPIO

Metodo della forma algebrica. Risolvere $(z^*)^2 - 2|z|^2 + 3z^* = 0$.

1. Si pone $z = x + iy$, quindi $z^* = x - iy$ e $|z|^2 = x^2 + y^2$. Si sviluppa il quadrato del coniugato.

$$(z^*)^2 = (x - iy)^2 = x^2 - 2ixy + i^2y^2 = x^2 - y^2 - 2ixy$$

2. Si sostituisce nell'equazione e si raggruppano i termini con i.

$$(x^2 - y^2 - 2ixy) - 2(x^2 + y^2) + 3(x - iy) = 0$$

$$(-x^2 - 3y^2 + 3x) + i(-2xy - 3y) = 0$$

3. Un numero complesso è nullo se lo sono la parte reale e la parte immaginaria: si ottiene un sistema.

$$-x^2 - 3y^2 + 3x = 0$$

$$-y(2x + 3) = 0$$

4. La seconda equazione è un prodotto: si annulla per $y = 0$ oppure per $x = -3/2$.

5. Caso $y = 0$. La prima equazione diventa $x(3 - x) = 0$.

$$-x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ oppure } x = 3$$

6. Caso $x = -3/2$. Sostituendo nella prima equazione si trova $-9/4 - 3y^2 - 9/2 = 0$, cioè $3y^2 = -27/4$, impossibile per y reale.

$$-\frac{9}{4} - 3y^2 - \frac{9}{2} = 0 \Rightarrow y^2 = -\frac{9}{4}$$

RISULTATO

Le soluzioni sono $z = 0$ e $z = 3$.

ESEMPIO

Metodo della fattorizzazione. Risolvere la stessa equazione $(z^*)^2 - 2|z|^2 + 3z^* = 0$.

1. Si sostituisce $|z|^2 = z\,z^*$.

$$(z^*)^2 - 2zz^* + 3z^* = 0$$

2. Si raccoglie z^* a fattor comune.

$$z^*(z^* - 2z + 3) = 0$$

3. Un prodotto è nullo se lo è uno dei fattori. Il primo fattore dà $z^* = 0$, quindi $z = 0$.

4. Il secondo fattore: $z^* - 2z + 3 = 0$. Si pone $z = x + iy$ e si separano parte reale e parte immaginaria.

$$(x - iy) - 2(x + iy) + 3 = 0$$

$$(-x + 3) + i(-3y) = 0 \;\Rightarrow\; x = 3, \quad y = 0$$

RISULTATO

Si trovano ancora $z = 0$ e $z = 3$.

ESEMPIO

Un'equazione con coniugato e senza modulo. Risolvere $(z^*)^2 - 2z + 3 = 0$.

1. Con $z = x + iy$ si sviluppa il quadrato del coniugato e si raggruppa.

$$(x^2 - y^2 - 2ixy) - 2(x + iy) + 3 = 0$$

$$(x^2 - y^2 - 2x + 3) + i(-2xy - 2y) = 0$$

2. Si impongono nulle parte reale e parte immaginaria. Nella seconda si raccoglie $-2y$.

$$x^2 - y^2 - 2x + 3 = 0$$

$$-2y(x + 1) = 0$$

3. Caso $y = 0$. La prima equazione diventa $x^2 - 2x + 3 = 0$, con discriminante $4 - 12 < 0$: nessuna soluzione reale.

4. Caso $x = -1$. La prima equazione diventa $1 - y^2 + 2 + 3 = 0$, cioè $y^2 = 6$.

$$y = \pm\sqrt{6}$$

RISULTATO

Le soluzioni sono $z = -1 + i\sqrt{6}$ e $z = -1 - i\sqrt{6}$.

FUNZIONE ESPONENZIALE COMPLESSA

Per $z = x + iy$ si definisce $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$. Per $z = iy$ si ha $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ e $e^{-iy} = \cos y - i \sin y$; in particolare $e^{i\pi} + 1 = 0$, perché $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$. Si ottengono le formule di Eulero:

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \qquad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

Ne segue la forma esponenziale $z = \rho\, e^{i\theta}$, dove $\rho = |z|$ e θ è un argomento di z.

Polinomi e funzioni razionali

DEFINIZIONE

Polinomio. $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ con $a_i \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$; il grado è n e $a_0 \neq 0$ è il coefficiente direttivo. Due polinomi sono identici ($p(x) = q(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$) se e solo se hanno lo stesso grado e gli stessi coefficienti (principio di identità dei polinomi).

Dati due polinomi A e B esistono un quoziente Q e un resto R, con grado di R minore di quello di B, tali che $A = QB + R$; se $R = 0$, A è divisibile per B. Per il teorema di Ruffini A è divisibile per $x - c$ se e solo se $A(c) = 0$. Iterando si ottiene $A(x) = a_0(x - c_1)(x - c_2)\dots(x - c_n)$, e per il teorema fondamentale dell'algebra ogni equazione algebrica di grado n ha esattamente n soluzioni complesse, contate con la molteplicità. Se i coefficienti sono reali e $\beta + iy$ è una soluzione di molteplicità k, lo è anche il coniugato $\beta - iy$; i fattori corrispondenti si compongono in $(x - \beta)^2 + y^2$, che ha coefficienti reali. Perciò ogni polinomio a coefficienti reali si decompone in fattori reali di primo e secondo grado:

$$p(x) = a_0\,(x-\alpha_1)^{s_1}\cdots(x-\alpha_h)^{s_h}\left[(x-\beta_1)^2+\gamma_1^2\right]^{t_1}\cdots\left[(x-\beta_k)^2+\gamma_k^2\right]^{t_k}$$

FUNZIONI RAZIONALI FRATTE

Una funzione $f(x) = A(x)/B(x)$, con A e B polinomi primi tra loro e B di grado positivo, è definita in $\mathbb{R}$ privato degli zeri reali di B. Se A e B non hanno divisori comuni, f si scrive come somma di fratti semplici $A/(x - a)^n$ e $(Ax + B)/(x^2 + k^2)^n$; per trovarli occorre conoscere gli zeri del denominatore.

Funzioni reali di una variabile reale

DEFINIZIONE

Funzione. Dati due insiemi non vuoti A e B, una funzione $f : A \to B$ associa a ogni elemento di A uno e un solo elemento di B. A è il dominio (insieme di definizione), B il codominio, $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ è l'immagine. Per $Y \subseteq B$, $f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\}$ è la controimmagine.

Una funzione è suriettiva se $f(A) = B$, iniettiva se $x_1 \neq x_2$ implica $f(x_1) \neq f(x_2)$; in tal caso, per ogni $y \in f(A)$ esiste un unico x con $f(x) = y$ e si definisce la funzione inversa $f^{-1} : f(A) \to A$. Valgono $f^{-1}(f(x)) = x$ e $f(f^{-1}(y)) = y$. Date $f : B \to C$ e $g : A \to B$, la funzione composta $F = f \circ g$, $F(x) = f(g(x))$, ha f come funzione esterna e g come funzione interna. Il grafico di $f : X \to \mathbb{R}$ è $\mathrm{gr}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

DOMINIO NATURALE

Il dominio naturale di una funzione reale è l'insieme dei valori per cui l'espressione ha senso. Per ogni operazione si scrive la condizione di esistenza (denominatore diverso da zero, radice di indice pari con radicando non negativo, logaritmo con argomento positivo, argomento di arcsin e arccos in $[-1, 1]$) e si risolve il sistema che ne risulta.

ESEMPIO

Rapporto con una radice. Determinare il dominio di $f(x) = (x^2 - 3)/\sqrt{(x + 1)}$.

1. Il numeratore è un polinomio e non pone condizioni. La radice quadrata richiede radicando non negativo, ma compare a denominatore, quindi deve anche essere diversa da zero: il radicando deve essere strettamente positivo.

$$x + 1 > 0$$

2. Si risolve la disequazione.

$$x > -1$$

RISULTATO

Il dominio è $X =]-1, +\infty[$.

DOMINIO DI FUNZIONI COMPOSTE

ESEMPIO

Radice con valore assoluto a denominatore. Determinare il dominio di $f(x) = \sqrt{(x - 1)}/(|x| - 3)$.

1. Si scrivono le due condizioni: radicando non negativo, denominatore diverso da zero.

$$x - 1 \geq 0, \qquad |x| - 3 \neq 0$$

2. La prima dà $x \geq 1$. Nella seconda $|x| \neq 3$ significa $x \neq 3$ e $x \neq -3$.

$$x \geq 1, \qquad x \neq 3,\ x \neq -3$$

3. Il valore -3 è già escluso da $x \geq 1$: resta da togliere solo $x = 3$.

RISULTATO

Il dominio è $[1, 3[\cup]3, +\infty[$.

ESEMPIO

Arcoseno di un valore assoluto. Determinare il dominio di $f(x) = \arcsin(|x - 1| - 3)$.

1. L'arcoseno è definito per argomenti in $[-1, 1]$.

$$-1 \leq |x - 1| - 3 \leq 1$$

2. Si aggiunge 3 a tutti i membri.

$$2 \leq |x - 1| \leq 4$$

3. Si spezza in due disuguaglianze: $|x - 1| \geq 2$ e $|x - 1| \leq 4$. La seconda dà $-4 \leq x - 1 \leq 4$, cioè $-3 \leq x \leq 5$; la prima dà $x - 1 \geq 2$ oppure $x - 1 \leq -2$, cioè $x \geq 3$ oppure $x \leq -1$.

$$-3 \leq x \leq 5 \ \text{ e } \ (x \geq 3 \ \text{ oppure } \ x \leq -1)$$

4. Si intersecano i risultati.

RISULTATO

Il dominio è $[-3, -1] \cup [3, 5]$.

ESEMPIO

Radici nidificate. Determinare il dominio di $f(x) = \sqrt[4]{(\sqrt[3]{(x - 2)} - 1)}$.

1. La radice cubica interna è definita per ogni x. La radice quarta esterna richiede radicando non negativo.

$$\sqrt[3]{x-2}-1\geq 0$$

2. Si porta 1 a destra e si osserva che la radice cubica è una funzione crescente: eleva al cubo entrambi i membri senza cambiare il verso.

$$\sqrt[3]{x-2}\geq 1 \iff x-2\geq 1$$

3. Si risolve.

$$x\geq 3$$

RISULTATO

Il dominio è $[3, +\infty[$.

ESEMPIO

Logaritmo di una radice. Determinare il dominio di $f(x) = \log \sqrt{((|x| - 2)/(x^2 + 3))}$.

1. Il logaritmo richiede argomento positivo, quindi la radice deve essere maggiore di zero. Una radice quadrata è positiva quando il radicando è positivo.

$$\frac{|x|-2}{x^2+3}>0$$

2. Il denominatore $x^2 + 3$ è sempre positivo (è un quadrato più 3), quindi non pone ulteriori condizioni: il segno della frazione è il segno del numeratore.

$$|x|-2>0 \iff |x|>2$$

3. $|x| > 2$ significa $x > 2$ oppure $x < -2$.

RISULTATO

Il dominio è $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$.

FUNZIONI LIMITATE, ESTREMI E MONOTONIA

Una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ è limitata (o limitata inferiormente o superiormente) se lo è l'insieme $f(X)$; gli estremi di $f(X)$ sono $\inf_X f$ e $\sup_X f$. Se esiste il massimo M di $f(X)$, M è il massimo assoluto e un punto c con $f(c) = M$ è un punto di massimo assoluto; analogamente per il minimo. Si chiamano estremi assoluti. Un punto $c \in X$ è di massimo (minimo) relativo se esiste un intorno I di c con $f(x) \leq f(c)$ (rispettivamente $\geq$) per ogni $x \in I \cap X$; un estremo assoluto è anche relativo, non viceversa. Il massimo assoluto è unico, ma i punti di massimo possono essere molti. Si chiama oscillazione di f in X la quantità $\sup\{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in X\}$; se f è limitata vale $\sup f - \inf f$, se non lo è l'oscillazione è $+\infty$.

DEFINIZIONE

Monotonia. $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è crescente se $x < y$ implica $f(x) \leq f(y)$; strettamente crescente se $f(x) < f(y)$; decrescente se $f(x) \geq f(y)$; strettamente decrescente se $f(x) > f(y)$. Una funzione strettamente monotona è iniettiva, quindi invertibile, e la sua inversa ha la stessa monotonia (dimostrazione: se fosse $f^{-1}(y) \geq f^{-1}(z)$ con $y < z$, applicando f si avrebbe $y \geq z$, assurdo).

MONOTONIA IN UN PUNTO E RAPPORTO INCREMENTALE

Per $c \in (a, b)$ e $x \neq c$ si pone $r(x) = (f(x) - f(c))/(x - c)$ (rapporto incrementale), con incremento $\Delta x = x - c$ della variabile e $\Delta f = f(x) - f(c)$ della funzione. In alternativa, con $h = x - c$, $R(h) = (f(c + h) - f(c))/h$; r e R si ottengono per composizione l'una dall'altra.

DEFINIZIONE

Crescenza in un punto. f è crescente nel punto c se esiste $s > 0$ tale che $f(x) < f(c)$ per $x \in]c - s, c[$ e $f(x) > f(c)$ per $x \in]c, c + s[$; decrescente in c in modo simmetrico. f è strettamente crescente (decrescente) in (a, b) se e solo se è crescente (decrescente) in ogni punto di (a, b).

DEFINIZIONE

Teorema. f è crescente (decrescente) nel punto c se e solo se esiste $s > 0$ tale che $r(x) > 0$ ($r(x) < 0$) per ogni $x \in]c - s, c + s[\setminus \{c\}$.

ESEMPIO

Dimostrazione del teorema. Se $r(x) > 0$ in un intorno di c, allora f è crescente in c.

1. Caso $x < c$. Il denominatore $x - c$ è negativo, e il rapporto è positivo: perciò il numeratore è negativo, cioè $f(x) < f(c)$.

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0, \quad x - c < 0 \Rightarrow f(x) - f(c) < 0$$

2. Caso $x > c$. Il denominatore è positivo, quindi anche il numeratore è positivo, cioè $f(x) > f(c)$.

$$x - c > 0 \Rightarrow f(x) - f(c) > 0$$

3. Il viceversa si ragiona allo stesso modo, partendo dalle due disuguaglianze e dividendo per $x - c$.

CONVESSITÀ

DEFINIZIONE

Funzione convessa. $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è convessa se per ogni $x, y \in (a, b)$ e ogni $t \in [0, 1]$ vale $f(tx + (1 - t)y) \leq t\, f(x) + (1 - t)\, f(y)$: il tratto di grafico tra le ascisse x e y sta sotto il segmento che unisce i due punti. Equivalentemente l'epigrafico $\text{epi}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq f(x)\}$ è un insieme convesso, cioè contiene il segmento che unisce due suoi punti.

SIMMETRIE E PERIODICITÀ

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è pari se $f(-x) = f(x)$ (grafico simmetrico rispetto all'asse y) e dispari se $f(-x) = -f(x)$ (grafico simmetrico rispetto all'origine); un grafico non è mai simmetrico rispetto all'asse x. f è periodica di periodo $T > 0$ se $f(x + T) = f(x)$ per ogni x; allora $f(x + hT) = f(x)$ per ogni $h \in \mathbb{Z}$.

Funzioni elementari

Sono elementari le funzioni seguenti e quelle ottenute con operazioni elementari, composizione e inversione.

FUNZIONE	DOMINIO	PROPRIETÀ
Costante $f(x) = k$, identità $f(x) = x$	$\mathbb{R}$	la prima è pari

FUNZIONE	DOMINIO	PROPRIETÀ
Potenza x^n, $n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	n pari: pari, crescente in $[0, +\infty[$, decrescente in $]-\infty, 0]$; n dispari: dispari, strettamente crescente
Potenza x^{-n}, $n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$x^{-n} = 1/x^n$; pari se n è pari, dispari se n è dispari
Potenza $x^{m/n}$	$[0, +\infty[$ se $m/n > 0$; $]0, +\infty[$ se $m/n < 0$	inversa di $x^{n/m}$ in $[0, +\infty[$
Potenza x^s, s irrazionale	$[0, +\infty[$ se $s \geq 0$; $]0, +\infty[$ se $s < 0$	strettamente crescente se $s > 0$
Radice $\sqrt[n]{x}$	$\mathbb{R}$ se n dispari; $[0, +\infty[$ se n pari	inversa di x^n (ristretta a $[0, +\infty[$ se n è pari)
Esponenziale a^x, $a > 0$, $a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$a^x > 0$; crescente se $a > 1$, decrescente se $a < 1$
Logaritmo $\log_a x$	$]0, +\infty[$	inversa di a^x
Seno e coseno	$\mathbb{R}$	periodiche di periodo 2π; sin dispari, cos pari
Tangente $\tan x = \sin x/\cos x$	$\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi\}$	dispari, di periodo π

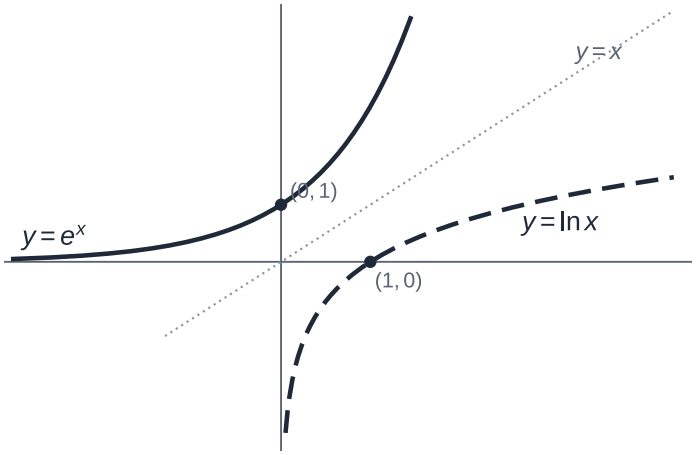

Figura 1. Esponenziale di base e (tratto continuo) e logaritmo naturale (tratteggiato): sono una l'inversa dell'altra, simmetriche rispetto alla bisettrice.

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE E INVERSE

Per $x \in \mathbb{R}$ si considera il punto P della circonferenza trigonometrica estremo di un arco con primo estremo $A = (1, 0)$ e misura x radianti: le coordinate di P sono $(\cos x, \sin x)$, e valgono $-1 \leq \cos x \leq 1$, $-1 \leq \sin x \leq 1$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$, $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$.

- **Arcocoseno.** In $[0, \pi]$ il coseno è strettamente decrescente e assume tutti i valori tra -1 e 1; la sua inversa è $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$. Per $\alpha \in [-1, 1]$, $\arccos \alpha$ è l'unico $x \in [0, \pi]$ con $\cos x = \alpha$.
- **Arcoseno.** In $[-\pi/2, \pi/2]$ il seno è strettamente crescente; l'inversa è $\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$.
- **Arcotangente.** In $]-\pi/2, \pi/2[$ la tangente è strettamente crescente e assume tutti i valori reali; l'inversa è $\arctan : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$, con $\lim_{x \to \pm\infty} \arctan x = \pm \pi/2$.

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI TRIGONOMETRICHE

RELAZIONE	SOLUZIONI
$\cos x = \alpha$	se $\lvert\alpha\rvert \le 1$: $x = \pm \arccos \alpha + 2k\pi$; se $\lvert\alpha\rvert > 1$: nessuna
$\cos x > \alpha$	se $-1 \le \alpha < 1$: $-\arccos \alpha + 2k\pi < x < \arccos \alpha + 2k\pi$; se $\alpha < -1$: sempre; se $\alpha \ge 1$: mai
$\sin x = \alpha$	se $\lvert\alpha\rvert \le 1$: $x = \arcsin \alpha + 2k\pi$ oppure $x = \pi - \arcsin \alpha + 2k\pi$
$\sin x > \alpha$	se $-1 \le \alpha < 1$: $\arcsin \alpha + 2k\pi < x < \pi - \arcsin \alpha + 2k\pi$
$\tan x = \alpha$	$x = \arctan \alpha + k\pi$ per ogni α reale
$\tan x > \alpha$	$\arctan \alpha + k\pi < x < \pi/2 + k\pi$

DA RICORDARE

Le funzioni trigonometriche e le loro inverse ritornano in tutti i capitoli seguenti, nei limiti notevoli e nelle derivate: conviene conoscere a memoria i valori di seno, coseno e tangente negli angoli notevoli.

CAPITOLO 2

Limiti di successioni e di funzioni

Il limite descrive il comportamento di una successione o di una funzione quando la variabile si avvicina a un punto o diverge. Dal caso delle successioni si ricavano per ponte tutti i risultati sulle funzioni, fino agli asintoti.

Successioni di numeri reali

DEFINIZIONE

Successione. Una successione di numeri reali è una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Si pone $a_n = f(n)$ (elemento di posto n) e si identifica la successione con l'insieme dei suoi elementi $\{a_n\}$.

Una successione verifica definitivamente (D) una condizione P se esiste $\alpha \in \mathbb{N}$ tale che a_n verifica P per ogni $n > \alpha$. Per esempio $\{n - 4\}$ è definitivamente positiva; se due condizioni valgono definitivamente, rispettivamente per $n > \alpha$ e per $n > \beta$, valgono entrambe per $n > \max(\alpha, \beta)$. Una successione è limitata se lo è l'insieme dei suoi termini, cioè se esistono h, k con $h \le a_n \le k$ per ogni n. Massimo, minimo, estremo superiore e inferiore di una successione sono quelli dell'insieme dei suoi termini.

DEFINIZIONE

Proposizione. Una successione definitivamente limitata è limitata.

ESEMPIO

Dimostrazione. Se $h \le a_n \le k$ per $n > \alpha$, allora la successione è limitata.

1. Rimangono fuori dalla condizione solo i primi α termini $a_1, \dots, a_\alpha$: sono in numero finito, quindi hanno un minimo e un massimo.
2. Si prende il più piccolo tra h e questi termini, e il più grande tra k e questi termini.
$$h' = \min\{h, a_1, \dots, a_\alpha\}, \qquad k' = \max\{k, a_1, \dots, a_\alpha\}$$
3. Allora ogni termine, sia tra i primi α sia dopo, sta tra h' e k'.
$$h' \le a_n \le k' \quad \text{per ogni } n$$

Limite di una successione

DEFINIZIONE

Convergenza. $\{a_n\}$ converge a $l \in \mathbb{R}$ ($a_n \to l$, $\lim a_n = l$) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\alpha \in \mathbb{N}$ tale che $n > \alpha$ implica $|a_n - l| < \varepsilon$, cioè $l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$: definitivamente i termini stanno in ogni intorno di l. Se $l = 0$ la successione è un infinitesimo.

DEFINIZIONE

Divergenza. $a_n \to +\infty$ ($-\infty$) se per ogni $k > 0$ esiste $\alpha \in \mathbb{N}$ tale che $n > \alpha$ implica $a_n > k$ ($a_n < -k$).

Una successione è regolare se converge o diverge, oscillante (non regolare) altrimenti. Per verificare un limite con la definizione si procede sempre allo stesso modo: si fissa ε (oppure k), si trasforma la disuguaglianza richiesta in una condizione su n e si controlla che questa condizione sia del tipo $n > \alpha$. La costante $a_n = k$ converge a k, perché $|k - k| = 0 < \varepsilon$ per ogni n; la successione $a_n = n$ diverge a $+\infty$, perché $n > k$ per ogni $n > k$.

ESEMPIO

Verifica di un limite finito. Verificare con la definizione che $1/n \to 0$.

1. Si fissa $\varepsilon > 0$ e si scrive la condizione $|a_n - l| < \varepsilon$ con $a_n = 1/n$ e $l = 0$.
$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$
2. Poiché n è positivo il valore assoluto si toglie, e si risolve in n moltiplicando per n/ε.
$$\frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$$
3. La condizione è del tipo $n > \alpha$ con α un naturale maggiore di $1/\varepsilon$: vale definitivamente.

RISULTATO

Per ogni $\varepsilon > 0$ la disuguaglianza vale per $n > 1/\varepsilon$, quindi $1/n \to 0$.

ESEMPIO

Verifica di un limite finito con una frazione. Verificare che $2n/(n + 1) \to 2$.

1. Si scrive $|a_n - 2| < \varepsilon$ e si riduce a denominatore comune.
$$\left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| = \left|\frac{2n - 2n - 2}{n+1}\right| = \frac{2}{n+1}$$
2. Si impone che questa quantità sia minore di ε e si risolve in n.
$$\frac{2}{n+1} < \varepsilon \iff n + 1 > \frac{2}{\varepsilon} \iff n > \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}$$

RISULTATO

La condizione è del tipo $n > \alpha$, quindi $2n/(n + 1) \to 2$.

ESEMPIO

Verifica di una divergenza. Verificare che $a_n = 1 - n^2 \to -\infty$ e che $n^2/(n + 1) \to +\infty$.

1. Per $1 - n^2$ si fissa $k > 0$ e si impone $a_n < -k$.
$$1 - n^2 < -k \iff n^2 > k + 1 \iff n > \sqrt{k+1}$$
2. Per $n^2/(n + 1)$ si impone $a_n > k$. Si moltiplica per $n + 1 > 0$ e si porta tutto a sinistra.
$$\frac{n^2}{n+1} > k \iff n^2 - kn - k > 0$$
3. Il trinomio è positivo fuori dalle sue radici. La radice positiva si ottiene con la formula risolutiva e la condizione è n maggiore di essa.
$$n > \frac{k + \sqrt{k^2 + 4k}}{2}$$

RISULTATO

In entrambi i casi la condizione è del tipo $n > \alpha$: $1 - n^2 \to -\infty$ e $n^2/(n+1) \to +\infty$.

ESEMPIO

Una successione oscillante. Mostrare che $(-1)^n$ non ha limite.

1. Si ragiona per assurdo: si suppone che tenda a 1. Si fissa $\varepsilon = 1/2$: definitivamente i termini devono stare in $]1/2, 3/2[$.

$$|(-1)^n - 1| < \tfrac{1}{2} \text{ definitivamente}$$

2. Ma per n dispari il termine vale -1, che non sta in $]1/2, 3/2[$, e gli indici dispari non finiscono mai: la condizione non può valere definitivamente.
3. Allo stesso modo non può tendere a -1 (i termini pari valgono 1) né a un altro numero.

RISULTATO

$(-1)^n$ oscilla. Non sono regolari neanche sin n e cos n.

Teoremi fondamentali

DEFINIZIONE

Unicità del limite. Se una successione è regolare, il suo limite è unico.

ESEMPIO

Dimostrazione dell'unicità. Si suppone $a_n \to l$ e $a_n \to L$ con $l < L$ e si cerca una contraddizione.

1. Si sceglie ε piccolo, in modo che gli intorni di l e di L non si tocchino: basta $0 < \varepsilon < (L - l)/2$.

$$l + \varepsilon < L - \varepsilon$$

2. Dalla convergenza a l, definitivamente $a_n < l + \varepsilon$. Dalla convergenza a L, definitivamente $a_n > L - \varepsilon$.

$$a_n < l + \varepsilon < L - \varepsilon < a_n \text{ definitivamente}$$

3. Si è ottenuto $a_n < a_n$, assurdo.

DEFINIZIONE

Permanenza del segno. Se $a_n \to l > 0$ (o $a_n \to +\infty$) allora $a_n > 0$ definitivamente; analogamente per $l < 0$. In forma generale: se $a_n \to l$ e $h < l$ ($k > l$), allora definitivamente $a_n > h$ ($a_n < k$).

ESEMPIO

Dimostrazione della permanenza del segno. Se $a_n \to l > 0$ allora $a_n > 0$ definitivamente.

1. Si sceglie ε tale che $0 < \varepsilon < l$.
2. Definitivamente $a_n > l - \varepsilon$, e poiché $\varepsilon < l$ si ha $l - \varepsilon > 0$.

$$a_n > l - \varepsilon > 0$$

Ne segue che una successione di numeri positivi può tendere a un limite positivo, a zero o a $+\infty$, ma non a un limite negativo.

DEFINIZIONE

Confronto. (1) Divergenti: se $a_n \le b_n$ e $a_n \to +\infty$ allora $b_n \to +\infty$; se $b_n \to -\infty$ allora $a_n \to -\infty$. (2) Convergenti (carabinieri): se $a_n \le b_n \le c_n$ e $a_n \to l$, $c_n \to l$, allora $b_n \to l$. Dimostrazione di (2): definitivamente $l - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < l + \varepsilon$.

REGOLARITÀ E LIMITATEZZA

- Una successione convergente è limitata: definitivamente è compresa tra $l - 1$ e $l + 1$. Non vale il viceversa: $(-1)^n$ è limitata e oscilla.
- Se $a_n \to +\infty$ è limitata inferiormente e non superiormente; se $a_n \to -\infty$ è limitata superiormente e non inferiormente.

SUCCESSIONI E VALORE ASSOLUTO

Se $a_n \to l$ allora $|a_n| \to |l|$ (perché $||a_n| - |l|| \le |a_n - l|$); se $a_n \to \pm\infty$ allora $|a_n| \to +\infty$. I viceversa sono falsi: $(-1)^n$ e $(-1)^n n$ hanno valori assoluti convergenti a 1 o divergenti ma oscillano. Se $|a_n| \to 0$ allora $a_n \to 0$. Una successione con $|a_n| \to +\infty$ è infinitamente grande ($a_n \to \infty$).

SUCCESSIONI MONOTONE

DEFINIZIONE

Regolarità delle successioni monotone. Se a_n è decrescente (D) tende al proprio estremo inferiore; se è crescente (D) tende al proprio estremo superiore.

ESEMPIO

Dimostrazione nel caso divergente. Se a_n è crescente e $\sup a_n = +\infty$, allora $a_n \to +\infty$.

1. Si fissa $k > 0$. Poiché $\sup a_n = +\infty$, k non è un maggiorante: esiste un indice α con $a_\alpha > k$.

$$\exists\, \alpha :\ a_\alpha > k$$

2. Per $n > \alpha$ la successione è crescente, quindi $a_n \ge a_\alpha$.

$$a_n \ge a_\alpha > k \quad \text{per } n > \alpha$$

RISULTATO

Per ogni k i termini sono definitivamente maggiori di k: $a_n \to +\infty$.

Per una successione crescente a_1 è il minimo, per una decrescente è il massimo. Una successione è monotona strettamente decrescente se $a_n > a_{n+1}$, decrescente se $a_n \ge a_{n+1}$, strettamente crescente se $a_n < a_{n+1}$, crescente se $a_n \le a_{n+1}$, per ogni n o definitivamente.

Operazioni con i limiti

Sia $\{a_n\}$ regolare e $c \in \mathbb{R}$. Se $a_n \to l$ allora $c\,a_n \to c\,l$ (per $c \neq 0$, $|c\,a_n - c\,l| < \varepsilon$ se $|a_n - l| < \varepsilon/|c|$); se $a_n \to +\infty$, $c\,a_n \to +\infty$ per $c > 0$ e $\to -\infty$ per $c < 0$; se $a_n \to -\infty$ avviene il contrario.

SOMMA

I) Se $a_n \to l$ e $b_n \to L$ allora $a_n + b_n \to l + L$. II) Se $a_n \to +\infty$ ed esiste h con $h \le b_n$ per ogni n, allora $a_n + b_n \to +\infty$ (anche se b_n non è regolare: $n + (-1)^n \to +\infty$).

ESEMPIO

Dimostrazione della somma. Se $a_n \to l$ e $b_n \to L$ allora $a_n + b_n \to l + L$.

1. Si fissa $\varepsilon > 0$. Per ciascuna successione si usa la precisione $\varepsilon/2$: definitivamente valgono entrambe le disuguaglianze.

$$|a_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |b_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

2. Si maggiora la distanza della somma da $l + L$ con la disuguaglianza triangolare.

$$|(a_n + b_n) - (l + L)| \le |a_n - l| + |b_n - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

a_n	b_n	$a_n + b_n$
l	L	$l + L$
$+\infty$	L	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	L	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	forma indeterminata

PRODOTTO

I) Se $a_n \to l$ e $b_n \to L$ allora $a_n b_n \to lL$. II) Se $a_n \to 0$ e $\{b_n\}$ è limitata allora $a_n b_n \to 0$ (per esempio $(1/n)(-1)^n \to 0$, anche se b_n non è regolare). III) Se $a_n \to +\infty$ ed esiste $h > 0$ con $b_n \ge h$, allora $a_n b_n \to +\infty$.

a_n	b_n	$a_n b_n$
$+\infty$	$L > 0$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$L < 0$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$L > 0$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$L < 0$	$+\infty$
$\pm\infty$	0	forma indeterminata

RECIPROCO E QUOZIENTE

Se a_n è regolare e definitivamente diversa da zero: se $a_n \to l \neq 0$, $1/a_n \to 1/l$; se $a_n \to 0$, $1/a_n \to \infty$ ($+\infty$ se $a_n > 0$ definitivamente, $-\infty$ se $a_n < 0$: $1/(1/n) = n \to +\infty$, $1/(-1/n) = -n \to -\infty$); se $a_n \to \infty$, $1/a_n \to 0$. Il quoziente a_n/b_n si studia come $a_n \cdot (1/b_n)$; si ha una forma indeterminata se entrambe sono infinitesime (0/0) o infinitamente grandi (∞/∞).

DA RICORDARE

Forme indeterminate: $+\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $0/0$, ∞/∞, e per le potenze $(+\infty)^0$, 0^0, 1^∞. Un errore grave è scrivere una relazione come $2/n \to 2/(+\infty) = 0$: si deve scrivere $2/n \to 0$, indicando $n \to +\infty$ sotto la freccia, perché ∞ non è un numero.

Limiti notevoli di successioni

POTENZE, POLINOMI, FUNZIONI RAZIONALI

- **Potenza** n^x: se $x > 0$, $n^x \to +\infty$ ($n^x > k$ equivale a $n > k^{1/x}$); se $x < 0$, $n^x = 1/n^{-x} \to 0$; se $x = 0$ è costante.
- **Polinomio** $x_n = a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \ldots + a_p$: si presenta in forma indeterminata, ma raccogliendo $n^p(a_0 + a_1/n + \ldots + a_p/n^p)$ la parentesi tende ad a_0 e $x_n \to +\infty$ se $a_0 > 0$, $-\infty$ se $a_0 < 0$. Conta solo il termine di grado massimo.
- **Funzione razionale** $x_n = (a_0 n^p + \ldots + a_p)/(b_0 n^q + \ldots + b_q)$: raccogliendo, $x_n = n^{p-q}(a_0 + \ldots)/(b_0 + \ldots)$. Se $p = q$, $x_n \to a_0/b_0$; se $p < q$, $x_n \to 0$; se $p > q$, $x_n \to \infty$ ($+\infty$ se a_0 e b_0 hanno lo stesso segno, $-\infty$ altrimenti).

ESEMPIO

Stesso grado. Calcolare $\lim (2n^2 + 5n + 3)/(n^2 + 8)$.

1. Numeratore e denominatore tendono entrambi a $+\infty$: forma indeterminata ∞/∞. Si raccoglie la potenza più alta, n^2, in entrambi.

$$\frac{2n^2+5n+3}{n^2+8} = \frac{n^2\left(2+\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{8}{n^2}\right)}$$

2. Si semplifica n^2.

$$= \frac{2+\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{8}{n^2}}$$

3. I termini $5/n$, $3/n^2$ e $8/n^2$ tendono a 0, quindi il numeratore tende a 2 e il denominatore a 1.

$$\frac{2+0+0}{1+0} = 2$$

RISULTATO

Il limite è il rapporto dei coefficienti direttivi: 2.

ESEMPIO

Grado del numeratore maggiore, segni discordi. Calcolare $\lim (2n^2 + 5n + 3)/(8 - 3n)$.

1. È la forma ∞/∞. Si raccoglie n^2 nel numeratore e n nel denominatore.

$$\frac{2n^2+5n+3}{8-3n} = \frac{n^2\left(2+\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}{n\left(\frac{8}{n}-3\right)}$$

2. Si semplifica n: resta un fattore n che diverge.

$$= n \cdot \frac{2+\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}{\frac{8}{n}-3}$$

3. Il fattore $n \to +\infty$ moltiplica una frazione che tende a $2/(-3) = -2/3 < 0$.

$$(+\infty) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\infty$$

RISULTATO

Il limite è $-\infty$.

ESEMPIO

Coefficiente direttivo negativo e stesso grado. Calcolare $\lim (-2n^4 - 6n)/(3n^4 + 5n^2 + 7)$.

1. Si raccoglie n^4 in entrambi.

$$\frac{-2n^4 - 6n}{3n^4 + 5n^2 + 7} = \frac{n^4\left(-2 - \frac{6}{n^3}\right)}{n^4\left(3 + \frac{5}{n^2} + \frac{7}{n^4}\right)}$$

2. Dopo la semplificazione le frazioni con n al denominatore tendono a 0.

$$\frac{-2 - 0}{3 + 0 + 0} = -\frac{2}{3}$$

RISULTATO

Il limite è $-2/3$.

SUCCESSIONE	LIMITE	MOTIVO
$(2n^2 + 5n + 3)/(n^2 + 8)$	2	stesso grado
$(2n^2 + 5n + 3)/(n^5 + 8)$	0	grado del numeratore minore
$(2n^2 + 5n + 3)/(n + 8)$	$+\infty$	numeratore di grado maggiore, segni concordi
$(2n^2 + 5n + 3)/(8 - 3n)$	$-\infty$	segni discordi
$(2n^2 - 5n^3 + 3)/(n^2 + 8)$	$-\infty$	n^3 con coefficiente negativo
$(3n^2 - 5n + 1)/(n + 2)^2$	3	stesso grado
$(1 - n^4)/(n^3 + 2n + 1)$	$-\infty$	numeratore di grado maggiore
$(-2n^4 - 6n)/(3n^4 + 5n^2 + 7)$	$-2/3$	rapporto dei coefficienti direttivi

SUCCESSIONE GEOMETRICA

Per $a \in \mathbb{R}$ la successione $\{a^n\}$ si comporta così:

VALORE DI A	COMPORTAMENTO
$a > 1$	$a^n \to +\infty$ ($a^n > k$ equivale a $n > \log_a k$)
$a = 1$	costante, $\to 1$
$0 < a < 1$	$a^n \to 0$ ($a^n < \varepsilon$ equivale a $n > \log_a \varepsilon$, con logaritmo di base minore di 1)
$a = 0$	$a^n \to 0$
$-1 < a < 0$	$a^n \to 0$ (perché $\lvert a^n\rvert = \lvert a\rvert^n \to 0$)
$a = -1$	oscilla
$a < -1$	$\lvert a^n\rvert \to +\infty$, a^n è oscillante

Esempi: $(-1/5)^n \to 0$, $(-6)^n$ oscilla, $18^n \to +\infty$.

SUCCESSIONI COMPOSTE CON FUNZIONI ELEMENTARI

DEFINIZIONE

Proposizione. Se $f : X \to \mathbb{R}$ è una funzione elementare, $\{a_n\} \subseteq X$ e $a_n \to l \in X$, allora $f(a_n) \to f(l)$. Per esempio se $a_n \to \pi$, $\cos a_n \to \cos \pi$; $n/(2n+1) \to 1/2$ implica $\log(n/(2n+1)) \to \log(1/2)$.

- **Esponenziale** a^{x_n} ($a > 0$, $a \neq 1$, $\{x_n\}$ regolare). Se $x_n \to l$, $a^{x_n} \to a^l$. Se x_n diverge: per $a > 1$, $x_n \to +\infty$ dà $a^{x_n} \to +\infty$, $x_n \to -\infty$ dà 0; per $a < 1$ il viceversa. Dimostrazione: $a^{x_n} > k$ equivale a $x_n > \log_a k$, definitivamente vera; per $x_n \to -\infty$ si usa $a^{x_n} = 1/a^{-x_n}$.
- **Logaritmo** $\log_a x_n$ ($x_n > 0$ regolare). Se $x_n \to l > 0$, $\log_a x_n \to \log_a l$. Per $a > 1$: $x_n \to +\infty$ dà $+\infty$, $x_n \to 0$ dà $-\infty$; per $a < 1$ il viceversa.
- **Potenza** $(a_n)^{b_n}$ con $a_n > 0$: si scrive $e^{b_n \log a_n}$. Se $a_n \to 2$ e $b_n \to 3$, tende a $e^{3 \log 2} = 8$. È indeterminata se il prodotto $b_n \log a_n$ è $0 \cdot \infty$: forme $(+\infty)^0$, 0^0 ($b_n \to 0$ e $\log a_n \to \infty$) e 1^∞ ($b_n \to \infty$ e $a_n \to 1$).

ESEMPIO

Potenza con base maggiore di 1. Calcolare $\lim 2^{(3n^2-1)/(n+4)}$.

1. Si studia l'esponente: è una funzione razionale con numeratore di grado 2 e denominatore di grado 1, con coefficienti dello stesso segno.

$$\frac{3n^2-1}{n+4} \to +\infty$$

2. La base è $2 > 1$ e l'esponente diverge a $+\infty$.

RISULTATO

Il limite è $+\infty$.

ESEMPIO

Esponente infinitesimo. Calcolare $\lim 3^{(6-n)/(2-n^2)}$.

1. Esponente: il grado del numeratore è minore di quello del denominatore, quindi tende a 0.

$$\frac{6-n}{2-n^2} \to 0$$

2. Per la continuità dell'esponenziale si può sostituire il limite dell'esponente.

$$3^0 = 1$$

RISULTATO

Il limite è 1.

ESEMPIO

Base minore di 1 ed esponente divergente. Calcolare $\lim (1/\pi)^{(n^2-2)/(3-n)}$.

1. Esponente: $n^2/(-n)$ ha grado del numeratore maggiore e segni discordi, quindi diverge a $-\infty$.

$$\frac{n^2-2}{3-n} \to -\infty$$

2 La base $1/\pi$ è minore di 1: una potenza di base minore di 1 con esponente che tende a $-\infty$ diverge a $+\infty$.

$$\left(\frac{1}{\pi}\right)^{-\infty} = +\infty$$

RISULTATO

Il limite è $+\infty$.

ESEMPIO

Logaritmi con base diversa. Calcolare $\lim \log_2((4n+1)/(n+3))$, $\lim \log_{1/3}((2n+1)/(n^4+8))$ e $\lim \log_{1/3}((1-3n^4)/(2-n^2))$.

1 Primo limite. L'argomento è una frazione di pari grado che tende a 4; per la continuità del logaritmo si sostituisce.

$$\frac{4n+1}{n+3} \to 4 \Rightarrow \log_2 4 = 2$$

2 Secondo limite. L'argomento ha numeratore di grado minore: tende a 0 da valori positivi. Con base minore di 1 il logaritmo di un numero che tende a 0^+ diverge a $+\infty$.

$$\frac{2n+1}{n^4+8} \to 0^+ \Rightarrow \log_{1/3}(0^+) = +\infty$$

3 Terzo limite. L'argomento ha numeratore di grado maggiore e coefficienti -3 e -1 concordi: tende a $+\infty$. Con base minore di 1 il logaritmo diventa $-\infty$.

$$\frac{1-3n^4}{2-n^2} \to +\infty \Rightarrow \log_{1/3}(+\infty) = -\infty$$

RISULTATO

I tre limiti valgono 2, $+\infty$ e $-\infty$. Se $a_n \to \infty$ le successioni $\cos a_n$, $\sin a_n$, $\tan a_n$ non sono regolari.

IL NUMERO E

La successione $x_n = (1+1/n)^n$ si presenta nella forma 1^∞. Si prova che è strettamente crescente e limitata superiormente da 3: converge a un numero minore di 3, che si chiama e.

$$e = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Il numero e è irrazionale, pur essendo razionali tutti i termini della successione. Dal numero e discendono i limiti seguenti: se $x_n \to \infty$, $(1+1/x_n)^{x_n} \to e$; per $x \in \mathbb{R}$, $(1+x/n)^n \to e^x$, perché $(1+x/n)^n = [(1+1/(n/x))^{n/x}]^x$.

Il metodo per i limiti con la forma 1^∞ è sempre lo stesso: si scrive la base come $1+g_n$ con $g_n \to 0$, si moltiplica e si divide l'esponente per g_n usando $(1+g_n)^{1/g_n} \to e$, e si calcola il limite dell'esponente moltiplicato per g_n.

ESEMPIO

Il caso più semplice. Calcolare $\lim (1+3/n)^n$.

1 Si pone $x = 3$ nel limite $(1+x/n)^n \to e^x$. Per vederlo si scrive $n = 3 \cdot (n/3)$.

$$\left(1+\frac{3}{n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{n/3}\right)^{n/3}\right]^3$$

2 La quantità tra parentesi quadre tende a e perché $n/3 \to \infty$.

$$\to e^3$$

RISULTATO

Il limite è e^3. Con $x = -1$ si ottiene analogamente $(1 - 1/n)^n \to 1/e$.

ESEMPIO

Base che tende a 1, primo esempio. Calcolare lim $((n + 4)/(n + 6))^{2n+1}$.

1. La base tende a 1 e l'esponente diverge: forma 1^∞. Si scrive la base come $1 + g_n$.

$$\frac{n+4}{n+6} = 1 + \frac{(n+4)-(n+6)}{n+6} = 1 + \frac{-2}{n+6}$$

2. Si moltiplica e si divide l'esponente per $g_n = -2/(n + 6)$, che tende a 0.

$$(1+g_n)^{2n+1} = \left[(1+g_n)^{1/g_n}\right]^{g_n(2n+1)}$$

3. Si calcola il limite dell'esponente: i due polinomi hanno lo stesso grado, quindi si fa il rapporto dei coefficienti direttivi.

$$g_n(2n+1) = \frac{-2(2n+1)}{n+6} \to -4$$

4. La parentesi quadra tende a e, quindi il risultato è e elevato al limite dell'esponente.

$$e^{-4}$$

RISULTATO

Il limite è e^{-4}.

ESEMPIO

Base che tende a 1, secondo esempio. Calcolare lim $((n^2 + 2)/(n + 1)^2)^{n+3}$.

1. Si scrive la base come $1 + g_n$: si sottrae 1 e si riduce a denominatore comune.

$$\frac{n^2+2}{(n+1)^2} - 1 = \frac{n^2+2-n^2-2n-1}{(n+1)^2} = \frac{1-2n}{(n+1)^2} = g_n$$

2. Si calcola g_n per l'esponente $n + 3$: numeratore $(n + 3)(1 - 2n) = -2n^2 - 5n + 3$, denominatore $n^2 + 2n + 1$.

$$g_n(n+3) = \frac{(1-2n)(n+3)}{(n+1)^2} = \frac{-2n^2-5n+3}{n^2+2n+1} \to -2$$

RISULTATO

Il limite è e^{-2}.

ESEMPIO

Base che tende a 1, terzo esempio. Calcolare lim $((n^2 + 3n)/(n + 2)^2)^{4n+3}$.

1. Base: $1 + g_n$ con g_n ottenuto per differenza.

$$g_n = \frac{n^2+3n}{(n+2)^2} - 1 = \frac{n^2+3n-n^2-4n-4}{(n+2)^2} = \frac{-n-4}{(n+2)^2}$$

2. Si calcola g_n per l'esponente $4n + 3$. Il numeratore ha grado 2 con coefficiente direttivo -4, il denominatore ha grado 2 con coefficiente 1.

$$g_n(4n+3) = \frac{(-n-4)(4n+3)}{(n+2)^2} \to \frac{-4}{1} = -4$$

RISULTATO

Il limite è e^{-4}.

ESEMPIO

Base che tende a 2: nessuna indeterminazione. Calcolare lim $((2n + 4)/(n + 6))^{2n+1}$.

1. La base tende a 2, non a 1: non è una forma indeterminata e non serve il numero e.

$$\frac{2n+4}{n+6} \to 2$$

2. Una base che tende a $2 > 1$ elevata a un esponente che diverge a $+\infty$ diverge.

$$2^{+\infty} = +\infty$$

RISULTATO

Il limite è $+\infty$.

ESEMPIO

Esponente a fattore di una frazione grande. Calcolare lim $((n^2 + 2)/(n + 3)^2)^{2n-1}$.

1. Si scrive la base come $1 + g_n$.

$$g_n = \frac{n^2+2-(n+3)^2}{(n+3)^2} = \frac{n^2+2-n^2-6n-9}{(n+3)^2} = \frac{-6n-7}{(n+3)^2}$$

2. Si calcola il limite di $g_n(2n - 1)$: numeratore $(-6n - 7)(2n - 1)$ di grado 2 con coefficiente -12, denominatore $(n + 3)^2$ di grado 2 con coefficiente 1.

$$g_n(2n-1) = \frac{(-6n-7)(2n-1)}{(n+3)^2} \to -12$$

RISULTATO

Il limite è e^{-12}.

LIMITI DERIVATI DAL NUMERO E

Se $a_n \to 0$ ($a_n \neq 0$): $\log(1 + a_n)/a_n \to 1$, $(e^{a_n} - 1)/a_n \to 1$, $((1 + a_n)^\alpha - 1)/a_n \to \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, e in base qualunque $\log_a(1 + a_n)/a_n \to \log_a e$, $(a^{a_n} - 1)/a_n \to \log a$.

ESEMPIO

Uso dei limiti derivati. Calcolare lim $(n + 1) \log(1 + n/(n^2 + 1))$.

1. Si pone $a_n = n/(n^2 + 1)$, che tende a 0. Si moltiplica e si divide per a_n in modo da formare il limite notevole.

$$(n+1)\log(1+a_n) = \frac{\log(1+a_n)}{a_n} \cdot a_n(n+1)$$

2 Il primo fattore tende a 1. Per il secondo si calcola il limite come rapporto di polinomi dello stesso grado.

$$a_n(n+1) = \frac{n(n+1)}{n^2+1} \to 1$$

RISULTATO

Il limite è $1 \cdot 1 = 1$.

LIMITI TRIGONOMETRICI

Si parte da $|\sin x| \le |x| \le |\tan x|$ per $x \in]-\pi/2, \pi/2[$. Se $a_n \to 0$, definitivamente $|a_n| < \pi/2$, quindi $|\sin a_n| \le |a_n| \le |\tan a_n|$; dividendo per $|\sin a_n|$ e passando ai reciproci, $\cos a_n \le (\sin a_n)/a_n \le 1$, e per il teorema dei carabinieri:

$$a_n \to 0,\ a_n \neq 0: \quad \frac{\sin a_n}{a_n} \to 1, \quad \frac{\tan a_n}{a_n} \to 1, \quad \frac{\arcsin a_n}{a_n} \to 1, \quad \frac{\arctan a_n}{a_n} \to 1, \quad \frac{1-\cos a_n}{a_n^2} \to \frac{1}{2}$$

ESEMPIO

Il limite di (1 − cos a)/a². Ricavare $(1 - \cos a_n)/a_n^{\,2} \to 1/2$ dai limiti precedenti.

1 Si moltiplica numeratore e denominatore per $1 + \cos a_n$ e si usa $(1 - \cos a_n)(1 + \cos a_n) = 1 - \cos^2 a_n = \sin^2 a_n$.

$$\frac{1-\cos a_n}{a_n^2} = \frac{\sin^2 a_n}{a_n^2(1+\cos a_n)} = \left(\frac{\sin a_n}{a_n}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos a_n}$$

2 Il primo fattore tende a $1^2 = 1$; $\cos a_n \to 1$, quindi il secondo fattore tende a 1/2.

$$1 \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

ESEMPIO

Un seno moltiplicato per un infinito. Calcolare $\lim (2n^2 + 3)\sin(n/(n^3 + 1))$.

1 L'argomento $a_n = n/(n^3 + 1)$ tende a 0. Si moltiplica e si divide per a_n.

$$(2n^2+3)\sin a_n = \frac{\sin a_n}{a_n} \cdot (2n^2+3)\,a_n$$

2 Il primo fattore tende a 1. Il secondo è un rapporto di polinomi in cui il numeratore ha grado 3 e coefficiente direttivo 2, il denominatore grado 3 e coefficiente 1.

$$(2n^2+3)\frac{n}{n^3+1} = \frac{2n^3+3n}{n^3+1} \to 2$$

RISULTATO

Il limite è 2.

ESEMPIO

Una tangente. Calcolare $\lim (3n - 1)\tan(2n/(n^2 + 4))$.

1 Con $a_n = 2n/(n^2 + 4) \to 0$, si scrive $\tan a_n = (\tan a_n/a_n) \cdot a_n$ e il primo fattore tende a 1.

$$(3n-1)\tan a_n = \frac{\tan a_n}{a_n} \cdot (3n-1)\frac{2n}{n^2+4}$$

2. Il secondo fattore ha numeratore $(3n-1)2n = 6n^2 - 2n$ di grado 2 e coefficiente 6, denominatore di grado 2 e coefficiente 1.

$$\frac{6n^2-2n}{n^2+4} \to 6$$

RISULTATO

Il limite è 6.

ESEMPIO

Seno diviso per un infinitesimo. Calcolare lim sin(1/(2n + 1))/(2/(3n)).

1. Con $a_n = 1/(2n+1) \to 0$ si moltiplica e si divide per a_n.

$$\frac{\sin a_n}{2/(3n)} = \frac{\sin a_n}{a_n} \cdot \frac{a_n}{2/(3n)}$$

2. Si semplifica il secondo rapporto, dividendo per una frazione si moltiplica per la frazione inversa.

$$\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{3n}{2} = \frac{3n}{2(2n+1)} = \frac{3n}{4n+2} \to \frac{3}{4}$$

RISULTATO

Il limite è 3/4.

Successioni estratte

DEFINIZIONE

Successione estratta. Data $\{a_n\}$ e una successione strettamente crescente $\{n_k\}$ di indici, la successione $\{a_{n(k)}\}$ è detta estratta di $\{a_n\}$. Esempi: $n_k = 2k$ dà i termini di posto pari, $n_k = 2k-1$ quelli di posto dispari, $n_k = r + k$ sopprime i primi r termini.

DEFINIZIONE

Regolarità delle estratte. Se $\{a_n\}$ è regolare, ogni sua estratta ha lo stesso limite. Quindi se due estratte hanno limiti diversi la successione oscilla. Per esempio $a_n = (-1)^n$: $a_{2k} = 1$ e $a_{2k-1} = -1$.

Valgono anche: se $\{a_{r+k}\}$ è regolare lo è $\{a_n\}$ con lo stesso limite; se $\{a_{2k}\}$ e $\{a_{2k-1}\}$ hanno lo stesso limite, $\{a_n\}$ ha quel limite. Per $b_n = (-1)^n x_n$ con $x_n > 0$ regolare: se $x_n \to 0$ allora $b_n \to 0$; se $x_n \to l \neq 0$ o $+\infty$ la successione non è regolare (il limite dei pari e dei dispari è diverso).

ESEMPIO

Pari e dispari. Studiare $(-1)^n(n+1)/(n^2+4)$ e $(-1)^n(2n+1)/(3n+4)$.

1. Nel primo caso $x_n = (n+1)/(n^2+4) > 0$ tende a 0 (grado del numeratore minore).

$$x_n = \frac{n+1}{n^2+4} \to 0 \Rightarrow (-1)^n x_n \to 0$$

2. Nel secondo caso $x_n = (2n+1)/(3n+4)$ tende a $2/3 \neq 0$. I termini di posto pari si avvicinano a 2/3, quelli di posto dispari a −2/3.

$$a_{2k} \to \frac{2}{3}, \qquad a_{2k-1} \to -\frac{2}{3}$$

3. Due estratte hanno limiti diversi: la successione oscilla.

Confronto tra infiniti e infinitesimi

Due infinitesimi (o infiniti) $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ sono dello stesso ordine se $|a_n/b_n| \to l > 0$. Per due infinitesimi, a_n è di ordine superiore a b_n se $a_n/b_n \to 0$; per due infiniti se $a_n/b_n \to \infty$ (è l'infinito più grande). Per $a_n \to 0$, $\sin a_n$ e a_n sono dello stesso ordine; $1 - \cos a_n$ è di ordine superiore ad a_n ed è dello stesso ordine di a_n^2, cioè è di ordine 2 rispetto ad a_n. In generale a_n è di ordine p rispetto a b_n se a_n e $(b_n)^p$ sono dello stesso ordine.

Gli infinitesimi fondamentali sono $1/n$ per $n \to +\infty$ e $x - c$ per $x \to c$; l'infinito fondamentale è n (o x) per $x \to \pm\infty$ e $1/(x - c)$ per $x \to c$. Tra gli infiniti vale $n^n > n! > a^n$ $(a > 1) > n^x$ $(x > 0)$, ciascuno di ordine superiore al successivo; per i polinomi, due infiniti $n^3 + 2n^2 + 3$ e $2n^3 + n + 1$ sono dello stesso ordine.

ESEMPIO

Ordine di un infinitesimo. Determinare l'ordine di $a_n = (n^2 + 3n + 1)/(n^4 + 6)$ rispetto a $1/n$.

1. La successione tende a 0 (numeratore di grado minore). Si confronta con le potenze dell'infinitesimo fondamentale $1/n$: occorre trovare p per cui $a_n/(1/n)^p$ ha limite finito e positivo.

$$\frac{a_n}{(1/n)^p} = n^p\, a_n$$

2. Per $p = 2$ si ha un rapporto di polinomi dello stesso grado.

$$n^2\,\frac{n^2+3n+1}{n^4+6} = \frac{n^4+3n^3+n^2}{n^4+6} \to 1$$

RISULTATO

Il limite è finito e positivo: a_n è un infinitesimo di ordine 2 rispetto a $1/n$.

Successioni definite per ricorrenza

Una successione è definita per ricorrenza se è dato il primo termine e una legge $a_{n+1} = f(a_n)$, con f funzione elementare. Per studiarla si procede in tre fasi.

- Si studia la monotonia (di solito per induzione) e la limitatezza, per concludere che la successione è regolare, quindi tende al proprio estremo superiore (se crescente) o inferiore (se decrescente).
- Si individua il candidato limite l: poiché a_{n+1} è un'estratta di a_n, ha lo stesso limite l; e $a_{n+1} = f(a_n) \to f(l)$ per la proposizione sulle composte, quindi per l'unicità del limite $f(l) = l$.
- Si risolve l'equazione $x = f(x)$ e tra le soluzioni si sceglie quella compatibile con l'estremo (superiore o inferiore). Se non c'è, la successione diverge.

ESEMPIO

Successione crescente. Studiare $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{(2 + a_n)}$.

1. Si calcolano i primi termini per farsi un'idea: $a_2 = \sqrt{3} \approx 1{,}73$, $a_3 = \sqrt{(2 + \sqrt{3})} \approx 1{,}93$. Sembra crescente e limitata da 2.

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \sqrt{3}, \quad a_3 = \sqrt{2+\sqrt{3}}, \ \ldots$$

2. Limitatezza: si dimostra per induzione che $a_n < 2$. Base: $a_1 = 1 < 2$. Passo: se $a_n < 2$ allora $2 + a_n < 4$ e la radice quadrata, funzione crescente, conserva la disuguaglianza.

$$a_n < 2 \Rightarrow a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{4} = 2$$

3. Monotonia: $a_n < a_{n+1}$ equivale, elevando al quadrato (i termini sono positivi), a $a_n^2 < 2 + a_n$. Si porta tutto a sinistra e si scompone.

$$a_n^2 - a_n - 2 < 0 \iff (a_n - 2)(a_n + 1) < 0 \iff -1 < a_n < 2$$

4. L'ultima condizione è vera per quanto visto al punto precedente. La successione è crescente e limitata: converge al proprio estremo superiore l.

5. Candidato limite: si passa al limite nella ricorrenza, $l = \sqrt{(2 + l)}$. Si eleva al quadrato e si risolve l'equazione di secondo grado.

$$l^2 = 2 + l \Rightarrow l^2 - l - 2 = 0 \Rightarrow l = 2 \text{ oppure } l = -1$$

6. La successione è crescente a partire da $a_1 = 1$, quindi il limite è almeno 1: si scarta -1.

RISULTATO

$a_n \to 2$.

ESEMPIO

Successione decrescente. Studiare $a_1 = 4$, $a_{n+1} = \sqrt{(6 + a_n)}$.

1. Primi termini: $a_2 = \sqrt{10} \approx 3{,}16 < 4$. Sembra decrescente, e limitata inferiormente da 3.

$$a_1 = 4, \quad a_2 = \sqrt{10}, \ \ldots$$

2. Limitatezza: per induzione $a_n > 3$. Base: $a_1 = 4 > 3$. Passo: se $a_n > 3$ allora $6 + a_n > 9$, quindi $a_{n+1} > \sqrt{9} = 3$.

$$a_n > 3 \Rightarrow a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} > \sqrt{9} = 3$$

3. Monotonia: $a_{n+1} < a_n$ equivale a $6 + a_n < a_n^2$, cioè a una disequazione di secondo grado da risolvere.

$$a_n^2 - a_n - 6 > 0 \iff (a_n - 3)(a_n + 2) > 0 \iff a_n > 3$$

4. L'ultima condizione vale per il punto precedente (i termini sono positivi, quindi il fattore $a_n + 2$ è positivo). La successione è decrescente e limitata inferiormente: converge al proprio estremo inferiore l.

5. Candidato limite: $l = \sqrt{(6 + l)}$, da cui l'equazione di secondo grado.

$$l^2 - l - 6 = 0 \Rightarrow l = 3 \text{ oppure } l = -2$$

6. Poiché $a_n > 3$, il limite non può essere -2.

RISULTATO

$a_n \to 3$.

ESEMPIO

Metodo di Erone. Studiare $a_1 = 5$, $a_{n+1} = (1/2)(a_n + 3/a_n)$.

1. Primo passo: $a_2 = (1/2)(5 + 3/5) = 14/5 = 2{,}8 < a_1$. Si congettura una successione decrescente, con termini positivi, vicina a $\sqrt{3}$.

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(5 + \frac{3}{5}\right) = \frac{14}{5}$$

2. Monotonia: $a_{n+1} < a_n$ equivale (con $a_n > 0$) a una disuguaglianza che si semplifica.

$$\frac{a_n^2 + 3}{2a_n} < a_n \iff a_n^2 + 3 < 2a_n^2 \iff a_n^2 > 3$$

3. Limitatezza: si dimostra per induzione $a_n > \sqrt{3}$. Base: $a_1 = 5 > \sqrt{3}$. Passo: $a_{n+1} > \sqrt{3}$ equivale a una disuguaglianza che è un quadrato.

$$\frac{a_n^2 + 3}{2a_n} > \sqrt{3} \iff a_n^2 - 2\sqrt{3}\,a_n + 3 > 0 \iff \left(a_n - \sqrt{3}\right)^2 > 0$$

4. L'ultima è sempre vera perché $a_n \neq \sqrt{3}$ (vale $a_n > \sqrt{3}$). Quindi a_n è decrescente e limitata inferiormente: converge.

5. Candidato limite: $l = (1/2)(l + 3/l)$. Si moltiplica per $2l$ e si risolve.

$$2l^2 = l^2 + 3 \Rightarrow l^2 = 3 \Rightarrow l = \sqrt{3} \text{ oppure } l = -\sqrt{3}$$

6. I termini sono positivi, quindi si scarta $-\sqrt{3}$.

RISULTATO

$a_n \to \sqrt{3}$: la ricorrenza produce approssimazioni successive della radice di 3.

Limite di una funzione

Per una funzione reale si possono dare nove definizioni di limite: convergenza, divergenza a $+\infty$ e a $-\infty$, per x che tende a un valore c, a $+\infty$ o a $-\infty$. Le definizioni si distinguono solo per il significato del termine definitivamente, che indica un opportuno intorno del punto verso cui tende x.

DEFINIZIONE

Limite per x → c. Sia $f : X \to \mathbb{R}$ e $c \in D(X)$ (punto di accumulazione di X, necessario perché f sia definita in punti arbitrariamente vicini a c). Si scrive $\lim_{x \to c} f(x) = l \in \mathbb{R}$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $x \in X$, $x \neq c$, $|x - c| < \delta$ implica $|f(x) - l| < \varepsilon$, cioè $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$. Si scrive $\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$ ($-\infty$) se per ogni $k > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $x \in X$, $x \neq c$, $|x - c| < \delta$ implica $f(x) > k$ ($f(x) < -k$).

La condizione non è richiesta nel punto c: per $f(x) = 1$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 4$ si ha $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ anche se in $x = 0$ la condizione non è verificata. Se vale una delle tre condizioni la funzione è regolare per $x \to c$, altrimenti è oscillante.

LIMITE PER X → ±∞

Per $f :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ si pone: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x_0 > a$ tale che $x > x_0$ implica $|f(x) - l| < \varepsilon$; $= +\infty$ se per ogni $k > 0$ esiste x_0 tale che $x > x_0$ implica $f(x) > k$; analogamente $-\infty$. Per $f :]-\infty, a[\to \mathbb{R}$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x_0 < a$ tale che $x < x_0$ implica $|f(x) - l| < \varepsilon$. Anche per questi limiti valgono unicità, permanenza del segno e confronto.

ESEMPIO

Verifica di un limite infinito in un punto. Verificare che $\lim_{x\to 0} 1/x^2 = +\infty$.

1. Si fissa $k > 0$ e si impone $f(x) > k$ per $x \neq 0$.

$$\frac{1}{x^2} > k$$

2. Poiché $x^2 > 0$ si può moltiplicare per x^2/k senza cambiare il verso; poi si estrae la radice, ricordando $\sqrt{(x^2)} = |x|$.

$$x^2 < \frac{1}{k} \iff |x| < \frac{1}{\sqrt{k}}$$

3. La condizione è del tipo $|x - 0| < \delta$ con $\delta = 1/\sqrt{k}$.

RISULTATO

Per ogni $k > 0$ esiste $\delta = 1/\sqrt{k}$: il limite è $+\infty$.

LIMITE SINISTRO E DESTRO

Per $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e $c \in]a, b]$, il limite della restrizione di f ad $(a, c[$ si chiama limite sinistro e si indica con $\lim_{x\to c^-} f(x)$; per $c \in [a, b[$ il limite della restrizione a $]c, b)$ è il limite destro $\lim_{x\to c^+} f(x)$.

DEFINIZIONE

Teorema. Se $c \in]a, b[$, esiste $\lim_{x\to c} f(x)$ se e solo se esistono i limiti sinistro e destro e coincidono; in tal caso il limite è il valore comune (finito o infinito). Dimostrazione: se il limite è l, la condizione vale in $]c - \delta, c + \delta[\setminus \{c\}$, quindi in ciascuno dei due semintorni; viceversa, se vale in $]c - \delta_1, c[$ e in $]c, c + \delta_2[$, vale in $]c - \delta, c + \delta[$ con $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$.

FUNZIONE	LIMITE SINISTRO	LIMITE DESTRO	LIMITE
$1/x$ in $c = 0$	$-\infty$	$+\infty$	non esiste
$e^{1/x}$ per $x < 0$, x^2 per $x > 0$	0	0	0
$x + 1$ per $x < 0$, x^2 per $x > 0$	1	0	non esiste
$1/x^2$ in $c = 0$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Nella seconda riga, per $x \to 0^-$ si ha $1/x \to -\infty$ e $e^{-\infty} = 0$; per $x \to 0^+$ si ha $x^2 \to 0$. Nella terza, $x + 1 \to 1$ da sinistra e $x^2 \to 0$ da destra: i due limiti sono diversi.

Teoremi sui limiti di funzione

Valgono risultati analoghi a quelli delle successioni.

DEFINIZIONE

Teoremi. (1) Unicità del limite. (2) Permanenza del segno: se $\lim_{x\to c} f(x) = l > 0$, esiste un intorno di c in cui $f(x) > 0$; se $k > l$, i valori di f sono definitivamente minori di k. (3) Confronto (carabinieri): se $f \le g \le h$ in X e f, h hanno lo stesso limite l per $x \to c$, anche g tende a l. (4) Confronto per divergenti: se $f \le g$ e $f \to +\infty$ allora $g \to +\infty$; se $g \to -\infty$ allora $f \to -\infty$.

DEFINIZIONE

Teorema ponte (caratterizzazione sequenziale). Sia $f : X \to \mathbb{R}$ e $c \in D(X)$. Allora $\lim_{x\to c} f(x) = l$ (anche $+\infty$ o $-\infty$, e anche per $c = \pm\infty$) se e solo se per ogni successione $\{x_n\} \subseteq X \setminus \{c\}$ con $x_n \to c$ si ha $f(x_n) \to l$.

Dal teorema ponte seguono tutte le operazioni con i limiti: se $\lim f = l$ e $\lim g = L$, allora $\lim f\,g = lL$; infatti per ogni $\{x_n\} \to c$ si ha $f(x_n) \to l$ e $g(x_n) \to L$, quindi $f(x_n)g(x_n) \to lL$. Valgono dunque le stesse tabelle delle successioni, e le stesse forme indeterminate: $+\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $0/0$, ∞/∞, $(+\infty)^0$, 0^0, 1^∞.

LIMITE DI UNA FUNZIONE COMPOSTA

DEFINIZIONE

Teorema. Siano $g : X \to Y$ e $f : Y \to \mathbb{R}$, sia $c \in D(X)$ e $\lim_{x\to c} g(x) = y$ con $y \in D(Y)$ (e $g(x) \neq y$ definitivamente, se y è finito). Se $\lim_{y\to y} f(y) = l$, allora $F(x) = f(g(x))$ verifica $\lim_{x\to c} F(x) = l$.

Per una funzione composta si esamina dunque prima il limite della funzione interna y, poi quello della funzione esterna per $y \to y$. Il teorema vale anche con c, y, l uguali a $\pm\infty$.

ESEMPIO

Quattro limiti di funzioni composte. Calcolare $\lim_{x\to 3} \log(x + 5)$, $\lim_{x\to+\infty} \log(x^2 + 2)$, $\lim_{x\to 2^-} 3^{1/(x-2)}$ e $\lim_{x\to 0^+} \log(1/x)$.

1. Primo. La funzione interna $x + 5$ tende a 8, che è un punto del dominio del logaritmo: basta sostituire.
$$\lim_{x\to 3} \log(x+5) = \log 8$$
2. Secondo. L'interna $x^2 + 2$ tende a $+\infty$; il logaritmo di base $e > 1$ diverge a $+\infty$ quando l'argomento tende a $+\infty$.
$$\lim_{x\to+\infty} \log(x^2+2) = +\infty$$
3. Terzo. Per $x \to 2^-$ si ha $x - 2 \to 0^-$, quindi l'interna $1/(x - 2) \to -\infty$. L'esponenziale di base $3 > 1$ tende a 0 quando l'esponente tende a $-\infty$.
$$\lim_{x\to 2^-} 3^{1/(x-2)} = 3^{-\infty} = 0$$
4. Quarto. Per $x \to 0^+$ si ha $1/x \to +\infty$, e il logaritmo diverge a $+\infty$.
$$\lim_{x\to 0^+} \log \frac{1}{x} = +\infty$$

DEFINIZIONE

Proposizione. Se $f : X \to \mathbb{R}$ è una funzione elementare e $c \in X$, allora $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Per un limite in un punto c del dominio basta quindi sostituire. I limiti da calcolare davvero sono quelli per $x \to \pm\infty$ (se f è definita in un intervallo non limitato) e per $x \to c$ con c punto di accumulazione non appartenente al dominio, oppure con f che cambia espressione a sinistra e a destra di c.

Limiti delle funzioni elementari

FUNZIONE	LIMITI
Potenza x^n, $n \in \mathbb{N}$	$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$; per $x \to -\infty$: $+\infty$ se n è pari, $-\infty$ se n è dispari
Potenza x^{-n}	$\lim_{x\to\pm\infty} x^{-n} = 0$; per $x \to 0$: $+\infty$ se n è pari; se n è dispari $-\infty$ da sinistra e $+\infty$ da destra
Potenza x^α, α non intero	$\alpha > 0$: $x^\alpha \to +\infty$ per $x \to +\infty$; $\alpha < 0$: $x^\alpha \to 0$ per $x \to +\infty$ e $\to +\infty$ per $x \to 0^+$
Esponenziale a^x	$a > 1$: $+\infty$ per $x \to +\infty$, 0 per $x \to -\infty$; $0 < a < 1$: il contrario
Logaritmo $\log_a x$	$a > 1$: $+\infty$ per $x \to +\infty$, $-\infty$ per $x \to 0^+$; $0 < a < 1$: il contrario

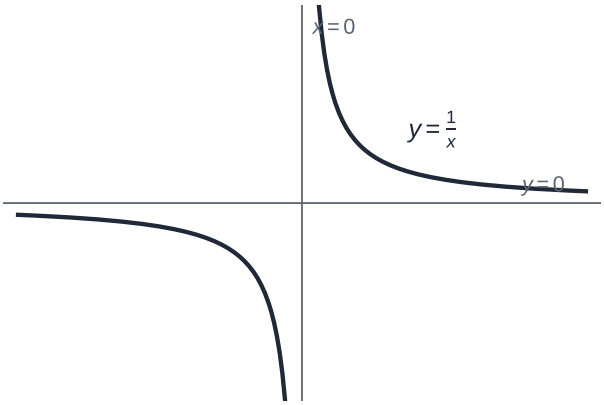

Figura 1. La funzione 1/x ha limite meno infinito da sinistra e più infinito da destra in 0, e tende a 0 per x che tende a più o meno infinito: ha asintoto verticale x = 0 e asintoto orizzontale y = 0.

POLINOMI

Per $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ si raccoglie x^n: $f(x) = x^n(a_0 + a_1/x + \ldots + a_n/x^n)$, con la parentesi che tende ad a_0. Per $x \to \pm\infty$ un polinomio diverge sempre: conta solo il termine di grado massimo.

LIMITE	RISULTATO
$\lim_{x\to+\infty} (a_0x^n + \ldots)$	$+\infty$ se $a_0 > 0$, $-\infty$ se $a_0 < 0$
$\lim_{x\to-\infty}$, n pari	$+\infty$ se $a_0 > 0$, $-\infty$ se $a_0 < 0$
$\lim_{x\to-\infty}$, n dispari	$-\infty$ se $a_0 > 0$, $+\infty$ se $a_0 < 0$

FUNZIONI RAZIONALI FRATTE

Sia $f(x) = A(x)/B(x)$, con A e B polinomi di gradi n e m e senza fattori comuni. Se $B(c) = 0$ e $A(c) \neq 0$, allora $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$. Per $x \to \pm\infty$ si ha la forma ∞/∞ e, raccogliendo la potenza massima:

CONFRONTO DEI GRADI	LIMITE PER X → ±∞
$n = m$	a_0/b_0
$n < m$	0
$n > m$	∞, con segno dato dal segno di numeratore e denominatore

ESEMPIO

Esponente dispari al numeratore e al denominatore. Calcolare $\lim_{x\to-\infty}(2x-2)^3/(4-x^3)$.

1. È la forma ∞/∞. Nel numeratore si raccoglie x dentro la parentesi prima di elevare al cubo; nel denominatore si raccoglie x^3.

$$\frac{(2x-2)^3}{4-x^3}=\frac{x^3\left(2-\frac{2}{x}\right)^3}{x^3\left(\frac{4}{x^3}-1\right)}$$

2. Si semplifica x^3 (diverso da zero) e si passa al limite: $2/x\to 0$ e $4/x^3\to 0$.

$$\frac{\left(2-\frac{2}{x}\right)^3}{\frac{4}{x^3}-1}\to\frac{2^3}{0-1}=-8$$

RISULTATO

Il limite è -8.

ESEMPIO

Funzione razionale con lo stesso grado. Calcolare $\lim_{x\to+\infty}(2-x^2)/(x^2+5)$.

1. Si dividono numeratore e denominatore per x^2, la potenza massima.

$$\frac{2-x^2}{x^2+5}=\frac{\frac{2}{x^2}-1}{1+\frac{5}{x^2}}$$

2. Le frazioni con x^2 a denominatore tendono a 0.

$$\frac{0-1}{1+0}=-1$$

RISULTATO

Il limite è -1, cioè il rapporto dei coefficienti direttivi $-1/1$.

ESEMPIO

Grado del numeratore maggiore. Calcolare $\lim_{x\to+\infty}(x^2+2)/(x-1)$ e $\lim_{x\to-\infty}(x^2+2)/(x-1)$.

1. Si raccoglie x^2 nel numeratore e x nel denominatore.

$$\frac{x^2+2}{x-1}=\frac{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=x\cdot\frac{1+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}$$

2. La frazione tende a 1 in entrambi i casi, quindi il comportamento è quello del fattore x.

$$x\to+\infty:\ x\cdot 1\to+\infty \qquad x\to-\infty:\ x\cdot 1\to-\infty$$

RISULTATO

I limiti sono $+\infty$ per $x\to+\infty$ e $-\infty$ per $x\to-\infty$.

ESEMPIO

Limite in un punto con denominatore che si annulla. Calcolare $\lim_{x \to 2^+} (1 - x)/(x^2 - 4)$.

1. Per $x \to 2$ il numeratore tende a $1 - 2 = -1$, diverso da zero, mentre il denominatore tende a 0.
$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$
2. Per $x \to 2^+$ si ha $x - 2 > 0$ e $x + 2 \to 4$: il denominatore tende a 0 da valori positivi.
$$x^2 - 4 \to 0^+$$
3. Un numero che tende a -1 diviso per una quantità positiva infinitesima diverge a $-\infty$.
$$\frac{-1}{0^+} = -\infty$$

RISULTATO

Il limite è $-\infty$.

Limiti notevoli

Dai limiti delle successioni, con il teorema ponte, si ottengono i limiti notevoli delle funzioni, tutti in forma indeterminata:

LIMITE	VALORE	FORMA
$\lim_{x \to 0} \sin x/x$	1	0/0
$\lim_{x \to 0} \tan x/x$	1	0/0
$\lim_{x \to 0} \arcsin x/x$	1	0/0
$\lim_{x \to 0} \arctan x/x$	1	0/0
$\lim_{x \to 0} (1 - \cos x)/x^2$	1/2	0/0
$\lim_{x \to \pm\infty} (1 + 1/x)^x$	e	1^∞
$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$	e	1^∞
$\lim_{x \to 0} \log(1 + x)/x$	1	0/0
$\lim_{x \to 0} (e^x - 1)/x$	1	0/0
$\lim_{x \to 0} ((1 + x)^\alpha - 1)/x$	α, con $\alpha \in \mathbb{R}$	0/0

Le versioni con argomento infinitesimo $f(x) \to 0$ si ottengono per composizione: per esempio $\sin(f(x))/f(x) \to 1$. Si dimostra, ricordando $(1 + 1/n)^n \to e$, che $(1 + 1/x)^x \to e$ per $x \to \pm\infty$ (le espressioni sono definite per $x < -1$ o $x > 0$); $(1 + x)^{1/x}$ è definito per $x > -1$, $x \neq 0$, e per $x \to 0$ si presenta nella forma 1^∞; da $\log((1 + x)^{1/x}) \to \log e = 1$ si ottiene $\log(1 + x)/x \to 1$, e analogamente gli altri due limiti.

ESEMPI DI CALCOLO

ESEMPIO

Coseno e seno insieme. Calcolare $\lim_{x\to 0} (1-\cos x)/(x \sin x)$.

1. È una forma 0/0. Si separa il denominatore in modo da formare i due limiti notevoli: $x \sin x = x^2 \cdot (\sin x/x)$.

$$\frac{1-\cos x}{x\sin x} = \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{x}{\sin x}$$

2. Il primo fattore tende a 1/2; il secondo è il reciproco di $\sin x/x$, quindi tende a 1.

$$\frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

RISULTATO

Il limite è 1/2.

ESEMPIO

Esponenziale e seno con argomenti diversi. Calcolare $\lim_{x\to 0} (e^{3x}-1)/\sin(2x)$.

1. Si forma il limite notevole dell'esponenziale con argomento $3x$ e quello del seno con argomento $2x$, compensando i coefficienti.

$$\frac{e^{3x}-1}{\sin 2x} = \frac{e^{3x}-1}{3x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{3x}{2x}$$

2. Il primo fattore tende a 1, il secondo (reciproco del limite notevole del seno) a 1, il terzo vale 3/2.

$$1 \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

RISULTATO

Il limite è 3/2.

ESEMPIO

Limite all'infinito con il coseno. Calcolare $\lim_{x\to+\infty} x^2(1-\cos(3/x))$.

1. Si pone $u = 3/x$: se $x \to +\infty$ allora $u \to 0^+$, e $x = 3/u$, quindi $x^2 = 9/u^2$.

$$x^2\left(1-\cos\frac{3}{x}\right) = \frac{9}{u^2}(1-\cos u)$$

2. Si riconosce il limite notevole $(1-\cos u)/u^2 \to 1/2$.

$$9 \cdot \frac{1-\cos u}{u^2} \to 9 \cdot \frac{1}{2}$$

RISULTATO

Il limite è 9/2.

ESEMPIO

Quoziente di un esponenziale e di un seno. Calcolare $\lim_{x \to +\infty} (e^{(2x-1)/(x^2+4)} - 1)/\sin((x + 2)/(x^2 + 4))$.

1. Si osserva che i due argomenti sono infinitesimi per $x \to +\infty$. Si pongono $a = (2x - 1)/(x^2 + 4)$ e $b = (x + 2)/(x^2 + 4)$.

$$\frac{e^a - 1}{\sin b} = \frac{e^a - 1}{a} \cdot \frac{b}{\sin b} \cdot \frac{a}{b}$$

2. I primi due fattori tendono a 1. Il terzo si semplifica perché i denominatori sono uguali.

$$\frac{a}{b} = \frac{2x - 1}{x + 2} \to 2$$

RISULTATO

Il limite è 2.

ESEMPIO

La forma 1 elevato a infinito. Calcolare $\lim_{x \to +\infty} ((x^2 + 2)/(x + 3)^2)^{2x+1}$.

1. Si scrive la base come $1 + g(x)$ con $g(x) \to 0$.

$$g(x) = \frac{x^2 + 2}{(x + 3)^2} - 1 = \frac{x^2 + 2 - x^2 - 6x - 9}{(x + 3)^2} = \frac{-6x - 7}{(x + 3)^2}$$

2. Si moltiplica e si divide l'esponente per $g(x)$ e si usa $(1 + g)^{1/g} \to e$.

$$(1 + g)^{2x + 1} = \left[(1 + g)^{1/g}\right]^{g\,(2x + 1)}$$

3. Si calcola il limite dell'esponente: rapporto di polinomi dello stesso grado.

$$g(x)(2x + 1) = \frac{(-6x - 7)(2x + 1)}{(x + 3)^2} \to -12$$

RISULTATO

Il limite è e^{-12}.

Confronto tra infiniti e infinitesimi di funzioni

Una funzione che tende a zero è un infinitesimo, una che diverge è un infinito. Per due infinitesimi (o infiniti) simultanei f e g, cioè per $x \to c$ entrambi o per $x \to \pm\infty$ entrambi: se $|f/g| \to l > 0$ sono dello stesso ordine; se $f/g \to 0$ ed entrambe sono infinitesime, f è di ordine superiore a g; se $|f/g| \to +\infty$ ed entrambe sono infinite, f è un infinito di ordine superiore. Se $|f/g^n| \to l > 0$, f è di ordine n rispetto a g. Per $x \to 0$, $1 - \cos x$ ha ordine 2 rispetto a x: $\lim_{x \to 0} (1 - \cos x)/x = 0$ ma $\lim (1 - \cos x)/x^2 = 1/2$.

DA RICORDARE

Infinitesimi fondamentali: $1/x$ per $x \to \pm\infty$ e $x - c$ per $x \to c$. Infiniti fondamentali: x per $x \to \pm\infty$ e $1/(x - c)$ per $x \to c$. Esempio di ordine superiore: per $x \to +\infty$, x^4 è un infinito di ordine superiore a x, quindi $x^4/x \to +\infty$.

Asintoti

DEFINIZIONE

Asintoto. Una retta r è un asintoto per f se la distanza $d(P, r)$ di un generico punto $P = (x, f(x))$ del grafico dalla retta tende a zero (per $x \to c$ oppure per $x \to \pm\infty$).

La distanza di un punto (x_0, y_0) dalla retta $ax + by + c = 0$ è $|ax_0 + by_0 + c|/\sqrt{(a^2 + b^2)}$.

TIPO	CONDIZIONE	EQUAZIONE
Verticale	f diverge per $x \to c$ (anche solo da sinistra o da destra)	$x = c$
Orizzontale destro	$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$	$y = l$
Orizzontale sinistro	$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$	$y = l$
Obliquo destro	$\lim_{x \to +\infty} f(x)/x = m \neq 0$ finito e $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = p \in \mathbb{R}$	$y = mx + p$

Dimostrazione: per $x = c$, $d(P, r) = |x - c| \to 0$; per $y = l$, $d(P, r) = |f(x) - l| \to 0$; per $y = mx + p$, $d(P, r) = |mx - f(x) + p|/\sqrt{(m^2 + 1)} \to 0$ se $f(x) - mx \to p$. Per l'asintoto obliquo f e x devono essere infiniti dello stesso ordine, quindi $f(x)/x$ deve avere limite finito. Per $x \to -\infty$ si procede in modo simmetrico.

FUNZIONI RAZIONALI FRATTE

Per $f = A/B$ (ridotta ai minimi termini), con n grado di A e m grado di B: se $B(c) = 0$, la retta $x = c$ è asintoto verticale; se $n = m$, $y = a_0/b_0$ è asintoto orizzontale destro e sinistro; se $n < m$, $y = 0$ è asintoto orizzontale; se $n > m$ la funzione diverge, e c'è un asintoto obliquo se e solo se $n = m + 1$ (divisione dei polinomi).

ESEMPIO

Asintoto verticale e orizzontale. Trovare gli asintoti di $f(x) = (2x + 1)/(x - 3)$.

1. Il denominatore si annulla in $x = 3$, dove il numeratore vale $7 \neq 0$: la funzione diverge, quindi $x = 3$ è un asintoto verticale.

$$\lim_{x \to 3^{\pm}} \frac{2x+1}{x-3} = \pm\infty$$

2. Per $x \to \pm\infty$ numeratore e denominatore hanno lo stesso grado: il limite è il rapporto dei coefficienti direttivi.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x+1}{x-3} = 2$$

RISULTATO

Asintoto verticale $x = 3$ e orizzontale $y = 2$.

ESEMPIO

Asintoto obliquo. Trovare gli asintoti di $f(x) = (2x^2 + 1)/(x - 3)$.

1. Asintoto verticale: il denominatore si annulla in $x = 3$ e il numeratore vale $19 \neq 0$.

$$x = 3$$

2. Il grado del numeratore (2) supera di 1 quello del denominatore (1): non c'è l'asintoto orizzontale, ma può esserci quello obliquo. Si calcola il coefficiente angolare.

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim \frac{2x^2 + 1}{x(x - 3)} = 2$$

3. Si calcola l'intercetta: si fa la differenza $f(x) - 2x$ con denominatore comune.

$$p = \lim \left(\frac{2x^2 + 1}{x - 3} - 2x \right) = \lim \frac{2x^2 + 1 - 2x^2 + 6x}{x - 3} = \lim \frac{6x + 1}{x - 3} = 6$$

RISULTATO

Asintoto verticale $x = 3$ e obliquo $y = 2x + 6$ (sia per $x \to +\infty$ sia per $x \to -\infty$).

ESEMPIO

Nessun asintoto obliquo. Trovare gli asintoti di $f(x) = (2x^3 + 1)/(x - 3)$.

1. Asintoto verticale $x = 3$: il denominatore si annulla e il numeratore vale $55 \neq 0$.

$$x = 3$$

2. Il grado del numeratore (3) supera di 2 quello del denominatore: il rapporto $f(x)/x$ diverge, quindi non esiste asintoto obliquo.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 + 1}{x(x - 3)} = \infty$$

RISULTATO

Solo l'asintoto verticale $x = 3$.

ESEMPIO

Due asintoti verticali. Trovare gli asintoti di $f(x) = (2x^2 + 1)/(x^4 - 16)$.

1. Si scompone il denominatore: $x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4)$, e il fattore $x^2 + 4$ non si annulla mai. Gli zeri reali sono $x = \pm 2$.

$$x^4 - 16 = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$$

2. In $x = \pm 2$ il numeratore vale $9 \neq 0$: la funzione diverge, quindi $x = 2$ e $x = -2$ sono asintoti verticali.
3. Il grado del numeratore (2) è minore di quello del denominatore (4): il limite per $x \to \pm\infty$ è 0.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$$

RISULTATO

Asintoti verticali $x = \pm 2$ e orizzontale $y = 0$.

ESEMPIO

Obliquo con coefficiente angolare e intercetta nulla. Trovare gli asintoti di $f(x) = (2x^4 + 1)/(x^3 - 27)$.

1. Il denominatore si scompone come $x^3 - 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$, e il secondo fattore ha discriminante $9 - 36 < 0$: l'unico zero reale è $x = 3$, dove il numeratore vale $163 \neq 0$. Asintoto verticale $x = 3$.

$$x^3 - 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$$

2. Il grado del numeratore (4) supera di 1 quello del denominatore (3): c'è un asintoto obliquo. Si divide.

$$2x^4+1=2x(x^3-27)+54x+1$$

3. Quindi $f(x) = 2x + (54x + 1)/(x^3 - 27)$ e la frazione resto tende a 0 per $x \to \pm\infty$ (grado 1 contro grado 3).

$$f(x)-2x=\frac{54x+1}{x^3-27}\to 0$$

RISULTATO

Asintoto verticale $x = 3$ e obliquo $y = 2x$.

FUNZIONI IRRAZIONALI

Per $f(x) = \sqrt{(A(x))}$ con A di secondo grado si cerca solo l'asintoto obliquo (A diverge a $+\infty$). Si distingue l'asintoto destro dal sinistro, ricordando che $\sqrt{(x^2)} = |x|$.

ESEMPIO

Radice di un trinomio con asintoti diversi. Trovare gli asintoti obliqui di $f(x) = \sqrt{(x^2 - 2x)}$.

1. Il dominio è $]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$ e la funzione diverge a $+\infty$ per $x \to \pm\infty$. Si distinguono i due lati.
2. Per $x \to +\infty$: $\sqrt{(x^2)} = x$. Si calcola il coefficiente angolare.

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x}=\lim\sqrt{\frac{x^2-2x}{x^2}}=\lim\sqrt{1-\frac{2}{x}}=1$$

3. Si calcola l'intercetta moltiplicando e dividendo per $\sqrt{(x^2 - 2x)} + x$ (prodotto notevole $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$).

$$f(x)-x=\frac{\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)\left(\sqrt{x^2-2x}+x\right)}{\sqrt{x^2-2x}+x}=\frac{-2x}{\sqrt{x^2-2x}+x}$$

4. Si divide numeratore e denominatore per x (positivo): il denominatore diventa $\sqrt{(1 - 2/x)} + 1 \to 2$.

$$\frac{-2}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1}\to\frac{-2}{2}=-1$$

5. Per $x \to -\infty$: $\sqrt{(x^2)} = |x| = -x$. Il coefficiente angolare cambia segno.

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x}=-\lim\sqrt{1-\frac{2}{x}}=-1$$

6. Intercetta: ora si calcola $f(x) - mx = f(x) + x$ e si usa $(A + B)(A - B)$ con denominatore $\sqrt{(x^2 - 2x)} - x$.

$$f(x)+x=\frac{-2x}{\sqrt{x^2-2x}-x}$$

7. Per $x \to -\infty$ si ha $\sqrt{(x^2 - 2x)} \approx -x$, quindi il denominatore è circa $-2x$ e il rapporto tende a 1.

$$\frac{-2x}{\sqrt{x^2-2x}-x}\to\frac{-2x}{-2x}=1$$

RISULTATO

Asintoto destro $y = x - 1$ e sinistro $y = -x + 1$.

ESEMPIO

Un altro caso. Trovare gli asintoti obliqui di $f(x) = \sqrt{(4x^2 + x + 1)}$.

1. La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ perché il trinomio $4x^2 + x + 1$ ha discriminante $1 - 16 < 0$.

2. Per $x \to +\infty$: coefficiente angolare 2 e intercetta dopo moltiplicazione per il coniugato.

$$\frac{f(x)}{x} \to 2, \qquad f(x) - 2x = \frac{4x^2 + x + 1 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 + x + 1} + 2x} = \frac{x + 1}{\sqrt{4x^2 + x + 1} + 2x}$$

3. Si divide per x: il denominatore tende a $2 + 2 = 4$.

$$\frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2} \to \frac{1}{4}$$

4. Per $x \to -\infty$: coefficiente angolare -2 e intercetta $-1/4$ (si procede come sopra, con $\sqrt{(x^2)} = -x$).

$$\frac{f(x)}{x} \to -2, \qquad f(x) + 2x \to -\frac{1}{4}$$

RISULTATO

Asintoto destro $y = 2x + 1/4$ e sinistro $y = -2x - 1/4$.

FUNZIONI CON LOGARITMO

ESEMPIO

Asintoti di una funzione con logaritmo. Trovare gli asintoti di $f(x) = x(2 \log x - 3)/(\log x - 2)$.

1. Il dominio richiede $x > 0$ e $\log x \neq 2$, cioè $x \neq e^2$: f è definita in $]0, e^2[\cup]e^2, +\infty[$.
2. Per $x \to e^2$ il denominatore tende a 0 e il numeratore a $e^2(4 - 3) = e^2 \neq 0$: la funzione diverge, quindi $x = e^2$ è asintoto verticale.

$$x = e^2$$

3. Per $x \to 0^+$: $x \to 0$ e $(2 \log x - 3)/(\log x - 2) \to 2$, quindi $f \to 0$: nessun asintoto verticale in 0.

$$f(x) \to 0 \cdot 2 = 0$$

4. Per $x \to +\infty$ si calcola il coefficiente angolare.

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{2\log x - 3}{\log x - 2} \to 2$$

5. Si calcola la differenza $f(x) - 2x$ con denominatore comune.

$$f(x) - 2x = x \cdot \frac{(2\log x - 3) - 2(\log x - 2)}{\log x - 2} = \frac{x}{\log x - 2} \to +\infty$$

6. La differenza non ha limite finito, quindi non esiste asintoto obliquo.

RISULTATO

Solo l'asintoto verticale $x = e^2$.

CAPITOLO 3

Funzioni continue

Una funzione è continua in un punto se il suo limite coincide con il valore assunto. Le funzioni continue in un intervallo godono di proprietà globali: assumono massimo e minimo, e assumono tutti i valori intermedi.

Continuità

DEFINIZIONE

Funzione continua. Sia $f : X \to \mathbb{R}$ e $c \in X \cap D(X)$. f è continua in c se $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$. f è continua in X se lo è in ogni punto di X.

In generale, per $c \in X$, f è continua in c se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $x \in X$ e $|x - c| < \delta$ implicano $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. Con questa formulazione, se c è un punto isolato di X, f è automaticamente continua in c (si prende δ abbastanza piccolo da isolare c). Dai risultati sui limiti seguono due regole.

- Somma, prodotto e quoziente (con denominatore diverso da zero) di funzioni continue sono continue.
- Una funzione composta $F = f \circ g$, con g continua in c e f continua in $g(c)$, è continua in c: infatti $\lim_{x \to c} g(x) = g(c)$ e $\lim_{y \to g(c)} f(y) = f(g(c))$.

Per il teorema ponte, f è continua in c se e solo se per ogni successione $\{x_n\} \subseteq X$ con $x_n \to c$ si ha $f(x_n) \to f(c)$.

ESEMPIO

Continuità e successioni. Calcolare $\lim \sin((2n^2 + 1)/(4n^2 + 3))$.

1. Si calcola il limite dell'argomento: numeratore e denominatore hanno lo stesso grado, quindi si fa il rapporto dei coefficienti direttivi.

$$\frac{2n^2+1}{4n^2+3} \to \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

2. Il seno è continuo in 1/2, quindi il limite del seno è il seno del limite.

$$\sin\left(\frac{2n^2+1}{4n^2+3}\right) \to \sin\frac{1}{2}$$

RISULTATO

Il limite è $\sin(1/2)$.

FUNZIONI DEFINITE A TRATTI

Per stabilire se una funzione definita da leggi diverse è continua, si esaminano i punti in cui cambia la legge. In ciascuno di essi si calcolano tre quantità: limite sinistro, limite destro e valore della funzione. La funzione è continua se e solo se le tre quantità coincidono.

FUNZIONE	STUDIO	ESITO
e^x per $x \geq 0$, $x + 1$ per $x < 0$	in 0: limite sinistro 1, limite destro $e^0 = 1$, $f(0) = 1$	continua in $\mathbb{R}$
e^x per $x \geq 0$, x per $x < 0$	in 0: limite sinistro 0, limite destro 1	non continua in 0

FUNZIONE	STUDIO	ESITO
x per $x \neq 0$, 3 per $x = 0$	$\lim_{x\to 0} x = 0 \neq f(0) = 3$	non continua in 0 (discontinuità eliminabile)
$1/x^2$ per $x \neq 0$, 0 per $x = 0$	$\lim_{x\to 0} 1/x^2 = +\infty$	non continua in 0
$1/x^2$ (senza specificare $f(0)$)	0 non appartiene al dominio	continua nel suo dominio

ESEMPIO

Parametro in un punto di raccordo. Sia $f(x) = e^{x+1}$ per $x > -1$, $f(-1) = k$, $f(x) = e^{1/(x+1)} + 1$ per $x < -1$. Trovare k affinché f sia continua in -1.

1. Fuori da -1 la funzione è continua, perché è composta di funzioni continue. Occorre solo studiare il punto $x = -1$ calcolando i due limiti.
2. Limite destro: e^{x+1} è continuo, si sostituisce $x = -1$.
$$\lim_{x\to -1^+} e^{x+1} = e^0 = 1$$
3. Limite sinistro: per $x \to -1^-$ si ha $x + 1 \to 0^-$, quindi $1/(x + 1) \to -\infty$ e $e^{-\infty} = 0$.
$$\lim_{x\to -1^-} \left(e^{\frac{1}{x+1}} + 1\right) = 0 + 1 = 1$$
4. I due limiti coincidono e valgono 1. Perché f sia continua il valore nel punto deve essere uguale a questo limite comune.
$$f(-1) = k = 1$$

RISULTATO

f è continua in -1 se e solo se $k = 1$.

ESEMPIO

Quando nessun parametro funziona. Sia $f(x) = e^{x+1}$ per $x > -1$ e $f(x) = e^{1/(x+1)}$ per $x < -1$ (senza il termine +1). Esiste k tale che f sia continua in -1 con $f(-1) = k$?

1. Limite destro: lo stesso di prima.
$$\lim_{x\to -1^+} e^{x+1} = e^0 = 1$$
2. Limite sinistro: ora manca il termine +1, quindi vale 0.
$$\lim_{x\to -1^-} e^{\frac{1}{x+1}} = e^{-\infty} = 0$$
3. I limiti sinistro e destro sono diversi: il limite in -1 non esiste, quindi nessun valore di k può renderla continua.

RISULTATO

Per nessun k la funzione è continua in -1.

ESEMPIO

Tre leggi. Studiare la continuità di $f(x) = x^2 + 1$ per $x < 0$, $f(x) = 1/(x + 1)$ per $0 \le x \le e$, $f(x) = \log x$ per $x > e$.

1. Le leggi cambiano in $x = 0$ e in $x = e$. Si studia prima $x = 0$: limite sinistro.

$$\lim_{x \to 0^-} (x^2 + 1) = 1$$

2. Limite destro in 0 e valore: si usa la legge valida per $0 \le x \le e$.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x+1} = 1, \qquad f(0) = \frac{1}{0+1} = 1$$

3. Le tre quantità coincidono: f è continua in 0.

4. Si passa a $x = e$. Limite sinistro, con la legge $1/(x + 1)$.

$$\lim_{x \to e^-} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{e+1}$$

5. Limite destro, con la legge $\log x$.

$$\lim_{x \to e^+} \log x = \log e = 1$$

6. I due limiti sono diversi ($1/(e + 1) \neq 1$): f non è continua in e.

RISULTATO

f è continua in 0 e non in e, dove il salto vale $1 - 1/(e + 1) = e/(e + 1)$.

ESEMPIO

Parametro in una funzione con limite notevole. Determinare k affinché $f(x) = \sin(3x)/x$ per $x \neq 0$, $f(0) = k$, sia continua in 0.

1. Per essere continua, il limite per $x \to 0$ deve esistere ed essere uguale a $f(0) = k$. Si calcola il limite.

2. È una forma 0/0. Si moltiplica e si divide per 3 per formare il limite notevole del seno con argomento $3x$.

$$\frac{\sin 3x}{x} = 3 \cdot \frac{\sin 3x}{3x}$$

3. Il rapporto $\sin(3x)/(3x)$ tende a 1 per $x \to 0$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3 \cdot 1 = 3$$

RISULTATO

Si deve avere $k = 3$.

Punti di discontinuità

DEFINIZIONE

Discontinuità. Dati $f : X \to \mathbb{R}$ e $c \in D(X)$, c è un punto di discontinuità per f se vale una di queste condizioni. (1) $c \notin X$ (per esempio $\log x$ in $c = 0$). (2) $c \in X$ ma non esiste il limite di f in c ($|x|/x$ in $c = 0$). (3) $c \in X$, il limite esiste ma $\lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$ ($f(x) = x$ per $x \neq 0$ e $f(0) = 5$).

TIPO	DEFINIZIONE	ESEMPIO
Eliminabile	$\lim_{x\to c} f(x) = l \in \mathbb{R}$ esiste finito	$\sin x/x$ in 0: il limite vale 1
Prima specie	esistono finiti, e diversi, il limite sinistro l^- e destro l^+; il salto è $\lvert l^+ - l^-\rvert$	$f(x) = x$ in $[0, 1[$ e $x + 3$ in $[1, 4]$, $c = 1$: salto 3
Punto di infinito	f diverge per $x \to c$ (anche solo da un lato)	$1/x$ in 0; la retta $x = c$ è asintoto verticale

Per una discontinuità eliminabile la funzione $g(x) = f(x)$ per $x \neq c$, $g(c) = l$ è continua in c, ed è detta prolungamento per continuità di f. Per esempio $\sin x/x$ ha prolungamento $g(x) = \sin x/x$ per $x \neq 0$ e $g(0) = 1$. La funzione x^x (in 0, per $x > 0$) ha limite 1 (perché $x \log x \to 0$, si veda il teorema di de L'Hôpital) e si prolunga con $g(0) = 1$.

ESEMPIO

Classificare e prolungare. Classificare la discontinuità di $f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$ in $x = 2$ ed eventualmente prolungare.

1. La funzione non è definita in $x = 2$ (denominatore nullo), quindi 2 è un punto di discontinuità.
2. Si scompone il numeratore con la differenza di quadrati e si semplifica il fattore $x - 2$, valido per $x \neq 2$.
$$\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$$
3. Il limite esiste ed è finito.
$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} (x+2) = 4$$

RISULTATO

Discontinuità eliminabile. Il prolungamento per continuità è $g(x) = x + 2$, cioè $g(2) = 4$.

ESEMPIO

Una discontinuità di prima specie e una di infinito. Classificare le discontinuità in $x = 0$ di $\lvert x\rvert/x$ e di $1/x^2$.

1. Per $\lvert x\rvert/x$: se $x > 0$ vale $x/x = 1$, se $x < 0$ vale $-x/x = -1$.
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$
2. I limiti sono finiti e diversi: prima specie, con salto $\lvert 1 - (-1)\rvert = 2$.
3. Per $1/x^2$: il limite diverge.
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$
4. La funzione diverge: punto di infinito, con asintoto verticale $x = 0$.

Limiti delle funzioni monotone

DEFINIZIONE

Teorema. Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ strettamente crescente. Per ogni $c \in]a, b[$ esistono i limiti sinistro e destro e valgono $l^- = \lim_{x\to c^-} f(x) = \sup_{(a,c[} f \le f(c) \le l^+ = \lim_{x\to c^+} f(x) = \inf_{]c,b)} f$. Esistono anche i limiti agli estremi: $\lim_{x\to a} f(x) = \inf f$ e $\lim_{x\to b} f(x) = \sup f$.

Se a, b appartengono al dominio, agli estremi si ha $l^+ \geq f(a)$ e $l^- \leq f(b)$. Per f decrescente: $l^- = \inf_{(a,c[} f \geq f(c) \geq l^+ = \sup_{]c,b)} f$. Quindi in un punto interno $c \in]a, b[$ una funzione monotona può avere solo discontinuità di prima specie (con salto $|l^+ - l^-|$ se $l^- \neq l^+$), mentre agli estremi dell'intervallo può avere solo una discontinuità eliminabile.

Funzioni continue in un intervallo

DEFINIZIONE

Teorema di Weierstrass. Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua (con $[a, b]$ chiuso e limitato), allora f ammette minimo e massimo assoluti. In particolare è limitata e $m = \min f = \inf f$, $M = \max f = \sup f$ sono assunti in punti $x_1, x_2 \in [a, b]$ (che possono non essere unici).

Il teorema richiede intervallo chiuso e limitato e continuità. Se manca una delle ipotesi la tesi può cadere: la funzione $1/x$ in $]0, 1]$ è continua ma non ha massimo (cresce senza limite vicino a 0); la funzione $f(x) = x$ in $[0, 1[$ non ha massimo (l'estremo superiore 1 non è assunto).

PROPRIETÀ DEI VALORI INTERMEDI

DEFINIZIONE

PVI. $f : X \to \mathbb{R}$ verifica la proprietà dei valori intermedi se, dati $\alpha, \beta \in f(X)$ con $\alpha < \beta$, per ogni $y \in]\alpha, \beta[$ esiste $x \in X$ con $f(x) = y$. In altre parole, se assume due valori assume anche tutti quelli compresi.

Esempi: la funzione $f(x) = 1$ per $x > 0$ e $f(x) = x$ per $x \leq 0$ (prende i valori $\alpha = 0$ e $\beta = 1$) non ha la PVI, perché $1/3$ non è assunto. La funzione $f(x) = x$ per $x \in]0, 1[$, $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ ha la PVI ma non è continua né monotona. Il legame tra PVI, continuità e monotonia, per $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, è questo:

- se f è continua in $[a, b]$, ha la PVI (non vale il viceversa);
- se f ha la PVI ed è monotona, allora è continua.

DEFINIZIONE

Teorema di esistenza degli zeri. Sia f continua in $[a, b]$ con $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ (o viceversa). Allora esiste $c \in [a, b]$ con $f(c) = 0$.

ESEMPIO

Dimostrazione per bisezione. Si divide l'intervallo a metà ripetutamente, tenendo la metà in cui i segni agli estremi sono ancora opposti.

1. Si considera il punto medio $x_0 = (a + b)/2$. Se $f(x_0) = 0$ la tesi è vera. Se $f(x_0) > 0$ si pone $[a_1, b_1] = [a, x_0]$, se $f(x_0) < 0$ si pone $[a_1, b_1] = [x_0, b]$.

$$f(a_1) < 0, \qquad f(b_1) > 0, \qquad b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$$

2. Si itera. Se per un certo n si trova $f(x_n) = 0$ la tesi è dimostrata. Altrimenti si ottengono due successioni di estremi con le proprietà seguenti.

$$f(a_n) < 0, \quad f(b_n) > 0, \qquad a_1 \leq \ldots \leq a_n < b_n \leq \ldots \leq b_1, \qquad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

3. $\{a_n\}$ è crescente e limitata superiormente da b, quindi converge a un numero c. Anche b_n converge a c, perché la differenza $b_n - a_n$ tende a zero.

$$b_n = a_n + \frac{b-a}{2^n} \to c + 0 = c$$

4. Per la continuità $f(a_n) \to f(c)$ e $f(b_n) \to f(c)$. Da $f(a_n) < 0$ segue $f(c) \le 0$ (permanenza del segno); da $f(b_n) > 0$ segue $f(c) \ge 0$.

$$f(c) \le 0 \ \text{ e } \ f(c) \ge 0 \ \Rightarrow \ f(c) = 0$$

DEFINIZIONE

Teorema dei valori intermedi (Darboux). Sia f continua in $[a, b]$ con $f(a) < f(b)$ (o $f(a) > f(b)$). Per ogni $y \in]f(a), f(b)[$ esiste $c \in [a, b]$ con $f(c) = y$. Dimostrazione: la funzione $g(x) = f(x) - y$ è continua e agli estremi ha segni opposti, quindi per il teorema degli zeri si annulla in un punto c, cioè $f(c) = y$.

Osservazioni. (1) Se l'intervallo non è chiuso e limitato, la tesi vale ancora, applicando il teorema a una restrizione. (2) Se f non è definita in un intervallo il teorema non vale: $f = 2$ in $[0, 1]$ e $f = 6$ in $[3, 4]$ è continua ma non assume i valori intermedi. (3) Il viceversa non vale. (4) Il teorema degli zeri è un caso particolare di Darboux.

ESEMPIO

Localizzare uno zero. Mostrare che $f(x) = e^x - 5x^2$ ha uno zero in $[0, 1]$ e restringere l'intervallo che lo contiene.

1. La funzione è continua perché somma di funzioni continue. Si calcola il segno agli estremi.

$$f(0) = e^0 - 0 = 1 > 0, \qquad f(1) = e - 5 < 0$$

2. I segni agli estremi sono opposti, quindi per il teorema degli zeri esiste almeno uno zero in $[0, 1]$.
3. Per localizzarlo si valuta f nel punto medio 1/2.

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{e} - \tfrac{5}{4}$$

4. Si osserva che $\sqrt{e} > 5/4$: elevando al quadrato è equivalente a $e > 25/16$, vero perché $25/16 < 2$.

$$\sqrt{e} > \tfrac{5}{4} \iff e > \tfrac{25}{16} \approx 1{,}56$$

5. Quindi $f(1/2) > 0$ e $f(1) < 0$: lo zero sta in $[1/2, 1]$. Si può iterare valutando $f(3/4)$, e così via.

RISULTATO

Almeno uno zero in $[1/2, 1]$.

CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI MONOTONE

DEFINIZIONE

Teorema. Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ strettamente monotona e con la PVI. Allora f è continua.

ESEMPIO

Dimostrazione. Sia f crescente e $c \in]a, b[$. Si deve provare $l^- = f(c) = l^+$.

1. Dal teorema sui limiti delle funzioni monotone si sa già che $l^- \le f(c) \le l^+$.
2. Per assurdo si suppone $l^- < f(c)$. Si prende un valore y strettamente compreso: $l^- < y < f(c)$. Per la PVI esiste x_0 con $f(x_0) = y$.
3. Si mostra che x_0 non può esistere, esaminando i tre casi.

$x_0 = c: \ y = f(c)$ (assurdo); $\qquad x_0 < c: \ y = f(x_0) \le l^-$ (assurdo); $\qquad x_0 > c: \ y = f(x_0) > f(c)$ (assurdo)

4. Si è raggiunta una contraddizione, quindi $l^- = f(c)$. Il caso l^+ è analogo.

IMMAGINE DI UN INTERVALLO

Sia f continua in $[a, b]$. Per Darboux la sua immagine è un intervallo, per Weierstrass ha minimo m e massimo M: $f([a, b]) = [m, M]$. Se f è crescente, $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$; se decrescente, $[f(b), f(a)]$. In un intervallo qualsiasi (a, b), l'immagine di una funzione continua è l'intervallo di estremi inf f e sup f; se f è crescente, $f((a, b)) =]\lim_{x\to a} f(x), \lim_{x\to b} f(x)[$, se è decrescente $]\lim_{x\to b} f(x), \lim_{x\to a} f(x)[$.

ESEMPIO

Immagine di un intervallo aperto. Determinare l'immagine di $f(x) = e^x$ in $]0, +\infty[$ e di $f(x) = \arctan x$ in $\mathbb{R}$.

1. e^x è continua e strettamente crescente: l'immagine è l'intervallo compreso tra i limiti agli estremi.
$$\lim_{x\to 0^+} e^x = 1, \qquad \lim_{x\to +\infty} e^x = +\infty$$
2. Quindi $f(]0, +\infty[) =]1, +\infty[$ (gli estremi non sono assunti perché l'intervallo è aperto).
3. $\arctan x$ è continua e strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$.
$$\lim_{x\to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$
4. Quindi $f(\mathbb{R}) =]-\pi/2, \pi/2[$.

CONTINUITÀ DELLA FUNZIONE INVERSA

DEFINIZIONE

Teorema. Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è strettamente crescente e continua, allora la funzione inversa $f^{-1} : [\inf f, \sup f] \to [a, b]$ è strettamente crescente e continua. Dimostrazione: f^{-1} è strettamente crescente e ha la PVI, perché per ogni $c \in [a, b]$ esiste y con $c = f^{-1}(y)$ (basta prendere $y = f(c)$); quindi per il teorema precedente è continua.

CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI ELEMENTARI

Tutte le funzioni elementari sono continue nei rispettivi domini. Se c appartiene a un intervallo in cui f è monotona (almeno a tratti) e vale la PVI, la continuità in c segue dal teorema di continuità delle funzioni monotone. Per esempio $f(x) = \sqrt[n]{x}$ per $c > 0$ è continua in $[a, b] \subseteq]0, +\infty[$ perché è strettamente crescente e verifica la PVI grazie al teorema della radice n esima aritmetica. Per $c = 0$ non esiste un intervallo contenente 0 in cui f sia monotona, e si verifica direttamente che i limiti sinistro e destro coincidono: $\lim_{x\to 0^-} x^2 = \inf_{]-\infty,0[} x^2 = 0 = \lim_{x\to 0^+} x^2$. Si procede allo stesso modo per $\sin x$ in $c = \pi/2$, che è un punto di massimo.

Complementi

FUNZIONI UNIFORMEMENTE CONTINUE

DEFINIZIONE

Uniforme continuità. $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è uniformemente continua se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni $x_1, x_2 \in (a, b)$ con $|x_1 - x_2| < \delta$, vale $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Il δ dipende solo da ε e non dal punto.

Se nella definizione si fissa $x_2 = c$ si ottiene la continuità in c: dunque uniformemente continua implica continua, non viceversa. Un esempio di funzione non uniformemente continua è e^x in $]0, +\infty[$, perché il grafico diventa arbitrariamente ripido; una funzione con derivata limitata è uniformemente continua; $1/x$ in $]0, 1[$ non lo è, per l'asintoto verticale. Il teorema di Heine e Cantor afferma che una funzione continua in $[a, b]$ è uniformemente continua.

SIMBOLO DI LANDAU

Se f è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a g (cioè $f/g \to 0$) si scrive $f = o(g)$ e si dice che f è o piccolo di g: è una quantità trascurabile rispetto a g. Per esempio, per $x \to 0$ valgono $1 - \cos x = o(x)$ (perché $(1 - \cos x)/x \to 0$) e $x^3 = o(x^2)$.

INSIEMI SEPARATI E CONTIGUI

Due insiemi $A, B \subseteq \mathbb{R}$ sono separati se $a \le b$ per ogni $a \in A$ e $b \in B$. A e B sono separati se e solo se $\sup A \le \inf B$. Ogni $y \in [\sup A, \inf B]$ è detto elemento di separazione; se $\sup A = \inf B$ si dice che A e B hanno un unico elemento di separazione. Sono contigui se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $a \in A$ e $b \in B$ con $b - a < \varepsilon$; due insiemi contigui sono separati e hanno un solo elemento di separazione.

ESEMPIO

Insiemi contigui. Mostrare che $A = \{-1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sono contigui.

1. Sono separati: ogni elemento di A è negativo e ogni elemento di B è positivo, quindi $a < b$.
2. Si fissa $\varepsilon > 0$ e si scelgono due elementi con lo stesso indice m: $a = -1/m$ e $b = 1/m$. La loro distanza è
$$b - a = \frac{1}{m} - \left(-\frac{1}{m}\right) = \frac{2}{m}$$
3. Questa distanza è minore di ε se $m > 2/\varepsilon$, condizione che si può sempre soddisfare.
$$\frac{2}{m} < \varepsilon \iff m > \frac{2}{\varepsilon}$$

RISULTATO

Gli insiemi sono contigui, con elemento di separazione 0.

INSIEMI	SONO SEPARATI?	ELEMENTO DI SEPARAZIONE
$A = [0, 1]$, $B = [1, 2]$	sì, $\sup A = \inf B = 1$	1 (appartiene sia ad A sia a B)
$A = [0, 1]$, $B =]1, 2]$	sì	1 (appartiene solo ad A)
$A = [0, 1[$, $B = [1, 2]$	sì	1 (appartiene solo a B)
$A = [0, 1[$, $B =]1, 2]$	sì	1 (non appartiene a nessuno dei due)

CAPITOLO 4

Calcolo differenziale

La derivata misura la velocità di variazione di una funzione: è il limite del rapporto incrementale, ha il significato geometrico di coefficiente angolare della tangente e permette di approssimare la funzione con un polinomio di primo grado.

Rapporto incrementale e derivata

Dati $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e $c \in (a, b)$, per $x \in (a, b)$ con $x \neq c$ si definisce il rapporto incrementale, con incremento della variabile $\Delta x = x - c$ e della funzione $\Delta f = f(x) - f(c)$:

$$r(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Ha una forma equivalente, ottenuta ponendo $x = c + h$ (con $h \neq 0$):

$$R(h) = \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

r si ottiene da R per composizione con $x = c + h$, quindi $\lim_{x \to c} r(x) = \lim_{h \to 0} R(h)$ se uno dei due esiste. Se il limite è positivo, per la permanenza del segno $r(x) > 0$ in un intorno di c, quindi f è crescente nel punto c (capitolo 1). Per questo il limite è fondamentale.

DEFINIZIONE

Derivata. f è derivabile in c se il limite del rapporto incrementale esiste ed è finito. Tale limite è la derivata (prima) di f in c: $f'(c) = \lim_{x \to c} r(x) = \lim_{h \to 0} R(h)$.

f è derivabile in (a, b) se lo è in ogni punto, e si definisce la funzione derivata $f' : (a, b) \to \mathbb{R}$. Se f' è derivabile in c, la sua derivata si chiama derivata seconda $f''(c)$; analogamente si definiscono f''', $f^{(4)}$, …, $f^{(n)}$.

ESEMPIO

Derivata con la definizione. Calcolare con la definizione la derivata di $f(x) = x^2$ in $c = 3$.

1. Si scrive il rapporto incrementale con $f(x) = x^2$ e $f(3) = 9$.

$$r(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

2. Si scompone il numeratore con la differenza di quadrati.

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3}$$

3. Per $x \neq 3$ si semplifica il fattore $x - 3$.

$$r(x) = x + 3$$

4. Si calcola il limite per $x \to 3$.

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} (x + 3) = 6$$

RISULTATO

$f'(3) = 6$.

DERIVATE SINISTRA E DESTRA

Per c interno si possono calcolare i limiti sinistro e destro del rapporto incrementale: se esistono finiti si chiamano derivata sinistra $f'_-(c)$ e derivata destra $f'_+(c)$. f è derivabile in c se e solo se $f'_-(c) = f'_+(c)$; negli estremi di un intervallo chiuso si ha solo la derivata destra in a e solo la sinistra in b.

DERIVABILITÀ E CONTINUITÀ

DEFINIZIONE

Teorema. Se f è derivabile in c, allora è continua in c.

ESEMPIO

Dimostrazione. Si vuole provare che $f(x) \to f(c)$ per $x \to c$.

1. Per $x \neq c$ si moltiplica e si divide per $x - c$ e si aggiunge e si sottrae $f(c)$, in modo da far comparire il rapporto incrementale.

$$f(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot (x - c) + f(c)$$

2. Si passa al limite: il rapporto incrementale tende a $f'(c)$, il fattore $x - c$ tende a 0.

$$f(x) \to f'(c) \cdot 0 + f(c)$$

3. Il prodotto vale zero, quindi resta solo $f(c)$.

$$f(x) \to f(c)$$

Il viceversa è falso. Esempi:

FUNZIONE	RAPPORTO INCREMENTALE IN $c = 0$	CONCLUSIONE
$\sqrt{x}$	$r(x) = 1/\sqrt{x} \to +\infty$	continua in 0, non derivabile (tangente verticale)
$\lvert x \rvert$	$r(x) = \lvert x \rvert / x$ vale 1 per $x > 0$ e -1 per $x < 0$	continua in 0, non derivabile: $f'_+(0) = 1 \neq f'_-(0) = -1$

Approssimazione con un polinomio di primo grado

DEFINIZIONE

Teorema. f è derivabile in c se e solo se esiste un polinomio di primo grado p tale che $p(c) = f(c)$ e $\lim_{x \to c} (f(x) - p(x))/(x - c) = 0$. Allora $p(x) = f(c) + f'(c)(x - c)$.

ESEMPIO

Dimostrazione. Si provano le due implicazioni.

1. Se f è derivabile, si pone $p(x) = f(c) + f'(c)(x - c)$. Si calcola la differenza.

$$\frac{f(x) - p(x)}{x - c} = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c) = r(x) - f'(c)$$

2. Per $x \to c$ il rapporto incrementale tende a $f'(c)$, quindi la differenza tende a 0.

$$r(x) - f'(c) \to 0$$

3. Viceversa, se esiste $p(x) = f(c) + a(x - c)$ con quel limite nullo, si riscrive il rapporto incrementale.

$$r(x) = \frac{f(x) - p(x)}{x - c} + a$$

4. Per ipotesi il primo termine tende a 0, quindi $r(x) \to a$: esiste $f'(c)$ e vale a.

$$r(x) \to 0 + a = a = f'(c)$$

Significa che $f(x) - p(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $x - c$, cioè $f(x) = p(x) + o(x - c)$: vicino a c, f si può sostituire con un polinomio di primo grado. Ad esempio $\sin x = x + o(x)$ per $x \to 0$.

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA: LA RETTA TANGENTE

La retta secante che passa per $(c, f(c))$ e $(c + h, f(c + h))$ ha equazione $y = f(c) + R(h)(x - c)$, con coefficiente angolare $R(h)$. Se f è derivabile in c, per $h \to 0$ la secante tende alla retta di equazione

$$t: \quad y = f(c) + f'(c)\,(x - c)$$

detta tangente al grafico nel punto di ascissa c. Approssimare f con un polinomio di primo grado significa idealmente sostituire una porzione di grafico con un segmento di tangente.

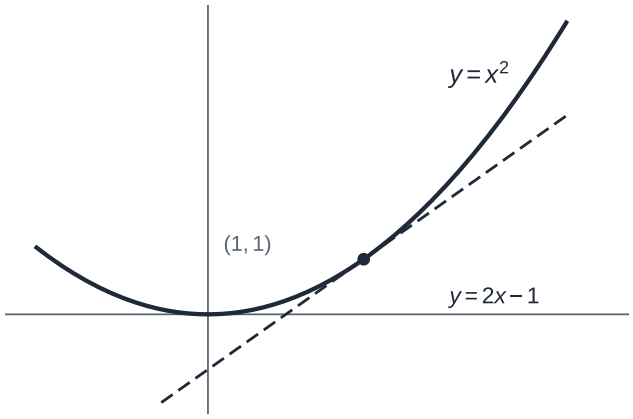

Figura 1. Il grafico di x² e la sua tangente nel punto (1, 1), di equazione y = 1 + 2(x − 1).

ESEMPIO

Equazione della tangente. Scrivere la tangente al grafico di $f(x) = x^2$ nel punto di ascissa $c = 1$.

1. Si calcola il valore della funzione nel punto.

$$f(1) = 1^2 = 1$$

2. Si calcola la derivata (con la regola della potenza) e poi il suo valore in 1.

$$f'(x) = 2x \;\Rightarrow\; f'(1) = 2$$

3. Si sostituiscono i valori nella formula della tangente.

$$y = f(1) + f'(1)(x - 1) = 1 + 2(x - 1)$$

4. Si sviluppa il prodotto per ottenere la forma esplicita.

$$y = 1 + 2x - 2 = 2x - 1$$

RISULTATO

La tangente è $y = 1 + 2(x - 1) = 2x - 1$.

PUNTI DI NON DERIVABILITÀ

Se una funzione continua non è derivabile in c, di solito il rapporto incrementale ha uno di questi comportamenti.

TIPO	CONDIZIONE	ESEMPIO
Punto angoloso	$f'_-(c)$ e $f'_+(c)$ esistono finite ma diverse (due tangenti)	$\lvert x\rvert$ in 0
Flesso a tangente verticale	$r(x) \to +\infty$ (o $-\infty$) da entrambe le parti	$\sqrt[3]{x}$ in 0
Cuspide	$r(x) \to +\infty$ da una parte e $-\infty$ dall'altra (le due tangenti verticali coincidono)	$\sqrt{\lvert x\rvert}$ in 0

ESEMPIO

Classificare un punto di non derivabilità. Studiare in $c = 0$ la derivabilità di $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e di $f(x) = \sqrt{\lvert x\rvert}$.

1. Per $\sqrt[3]{x}$ il rapporto incrementale in 0 è $r(x) = \sqrt[3]{x}/x = x^{1/3 - 1} = x^{-2/3} = 1/\sqrt[3]{(x^2)}$.

$$r(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

2. Per $x \to 0$ da entrambi i lati il denominatore tende a 0^+ (è una radice di un quadrato), quindi il rapporto diverge a $+\infty$ da entrambe le parti: flesso a tangente verticale.

$$\lim_{x \to 0^{\pm}} r(x) = +\infty$$

3. Per $\sqrt{\lvert x\rvert}$ il rapporto incrementale in 0 è $r(x) = \sqrt{\lvert x\rvert}/x$. Per $x > 0$ vale $1/\sqrt{x}$; per $x < 0$ vale $\sqrt{(-x)}/x = -1/\sqrt{(-x)}$.

$$\lim_{x \to 0^+} r(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to 0^-} r(x) = -\infty$$

4. I limiti sono infiniti di segno opposto: cuspide.

Regole di derivazione

Siano f, g derivabili in un punto c.

REGOLA	FORMULA	NOTE
Combinazione lineare	$(hf + kg)'(c) = h\,f'(c) + k\,g'(c)$	il rapporto incrementale è combinazione lineare di quelli di f e g
Prodotto	$(fg)'(c) = f'(c)\,g(c) + f(c)\,g'(c)$	dimostrazione sotto
Reciproco	$(1/f)'(c) = -f'(c)/(f(c))^2$, per $f(c) \neq 0$	f continua in c, quindi non nulla in un intorno: ha senso $1/f$
Quoziente	$(f/g)'(c) = (f'(c)\,g(c) - f(c)\,g'(c))/(g(c))^2$, per $g(c) \neq 0$	si scrive $f \cdot (1/g)$
Composta	$(f \circ g)'(c) = f'(g(c))\,g'(c)$	g derivabile in c, f derivabile in $g(c)$

ESEMPIO

Dimostrazione della regola del prodotto. Calcolare la derivata di $F = fg$ in c.

1. Si scrive il rapporto incrementale di F.
$$\frac{f(x)g(x) - f(c)g(c)}{x - c}$$
2. Si aggiunge e si sottrae $f(c)g(x)$ al numeratore, in modo da poter raccogliere.
$$= \frac{f(x)g(x) - f(c)g(x) + f(c)g(x) - f(c)g(c)}{x - c}$$
3. Si raccoglie $g(x)$ nei primi due termini e $f(c)$ negli altri due.
$$= \frac{f(x) - f(c)}{x - c}\, g(x) + f(c)\, \frac{g(x) - g(c)}{x - c}$$
4. Per $x \to c$: i rapporti tendono a $f'(c)$ e $g'(c)$, e $g(x) \to g(c)$ perché g è derivabile, quindi continua.
$$F'(c) = f'(c)\, g(c) + f(c)\, g'(c)$$

ESEMPIO

Dimostrazione della regola del reciproco. Calcolare la derivata di $1/f$ in c, con $f(c) \neq 0$.

1. Rapporto incrementale di $1/f$, con denominatore comune.
$$\frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(c)}}{x - c} = \frac{f(c) - f(x)}{f(x)f(c)\,(x - c)}$$
2. Si estrae il segno meno invertendo il numeratore, così compare il rapporto incrementale di f.
$$= -\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot \frac{1}{f(x)f(c)}$$
3. Per $x \to c$: il primo fattore tende a $f'(c)$, e $f(x) \to f(c)$ per continuità.
$$\left(\frac{1}{f}\right)'(c) = -\frac{f'(c)}{(f(c))^2}$$

DEFINIZIONE

Derivata della funzione inversa. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ strettamente crescente e continua (quindi invertibile con inversa continua e strettamente crescente da $[f(a), f(b)]$ a $[a, b]$), sia $y \in [f(a), f(b)]$ e $c \in [a, b]$ con $f(c) = y$. Se $f'(c) \neq 0$ allora f^{-1} è derivabile in y e $(f^{-1})'(y) = 1/f'(c)$. Analogo se f è strettamente decrescente.

Per calcolare $(f^{-1})'(y)$ occorre: (1) risolvere $f(x) = y$ per trovare c; (2) calcolare $f'(c)$ e verificare che sia diverso da zero; (3) prendere il reciproco.

DERIVATA DI |F| E DI LOG |F|

Per f derivabile e non nulla in c: $(|f|)'(c) = (|f(c)|/f(c))\, f'(c)$, perché la derivata di $|x|$ per $x \neq 0$ è $|x|/x = \operatorname{sgn} x$. Per $F(x) = \log |f(x)|$ si ha

$$F'(x) = \frac{1}{|f|} \cdot \frac{|f|}{f} \cdot f' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

ESEMPIO

Derivata di un logaritmo con valore assoluto. Calcolare la derivata di $F(x) = \log |x^2 - 3x|$.

1. Si applica la regola $(\log |f|)' = f'/f$ con $f(x) = x^2 - 3x$.

$$F'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

2. Si calcola $f'(x)$.

$$f'(x) = 2x - 3$$

3. Si sostituisce. La formula vale dove $f(x) \neq 0$, cioè per $x \neq 0$ e $x \neq 3$.

$$F'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x}$$

DERIVATA DI F ELEVATA A G

Per $f(x) = a(x)^{b(x)}$ con $a > 0$ si scrive $f = e^{b \log a}$ e si deriva come funzione composta. Il risultato è

$$f' = a^b \left(b' \log a + b \frac{a'}{a} \right)$$

ESEMPIO

Una funzione elevata a una funzione. Calcolare la derivata di $f(x) = x^x$ per $x > 0$.

1. Si riscrive la funzione come esponenziale.

$$x^x = e^{x \log x}$$

2. Si deriva l'esponenziale: la derivata è l'esponenziale stesso per la derivata dell'esponente, che è un prodotto.

$$f'(x) = e^{x \log x} \cdot (x \log x)'$$

3. Regola del prodotto sull'esponente.

$$(x \log x)' = 1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1$$

4. Si torna alla forma originale della base.

$$f'(x) = x^x (\log x + 1)$$

ESEMPIO

Una funzione con base e esponente non banali. Calcolare la derivata di $f(x) = (2x + 1)^{x^2+3}$.

1. Si riscrive con l'esponenziale, con $a = 2x + 1$ e $b = x^2 + 3$.

$$f(x) = e^{(x^2+3)\log(2x+1)}$$

2. Si deriva l'esponente con la regola del prodotto: $b' \log a + b\, a'/a$.

$$\left[(x^2+3)\log(2x+1)\right]' = 2x \log(2x+1) + (x^2+3) \cdot \frac{2}{2x+1}$$

3. Si moltiplica per la funzione originale.

$$f'(x) = (2x+1)^{x^2+3} \left[2x \log(2x+1) + \frac{2(x^2+3)}{2x+1} \right]$$

Derivate delle funzioni elementari

FUNZIONE	DERIVATA	DIMOSTRAZIONE
Costante k	0	$r(x) = 0$
Identità x	1	$r(x) = 1$
x^n, $n \in \mathbb{N}$	$n\,x^{n-1}$	$r(x) = (x^n - c^n)/(x - c) = x^{n-1} + x^{n-2}c + \ldots + c^{n-1} \to n\,c^{n-1}$
x^{-n}	$-n\,x^{-n-1}$	regola del reciproco
x^α, $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha\,x^{\alpha-1}$	$x^\alpha = e^{\alpha \log x}$, derivata $e^{\alpha \log x}\,\alpha/x$
$\lvert x\rvert$	$\lvert x\rvert/x$, per $x \neq 0$ (funzione segno)	non derivabile in 0
e^x	e^x	$r(x) = e^c(e^{x-c} - 1)/(x - c) \to e^c$ (limite notevole)
a^x, $a > 0$, $a \neq 1$	$a^x \log a$	analogo, $(a^h - 1)/h \to \log a$
$\log x$, $x > 0$	$1/x$	come inversa di e^x: $(f^{-1})'(y) = 1/e^c = 1/y$
$\log_a x$	$(1/x)\log_a e = 1/(x \log a)$	$\log_a x = \log x/\log a$
$\sin x$	$\cos x$	$R(h) = \sin c\,(\cos h - 1)/h + \cos c\,(\sin h)/h \to \cos c$
$\cos x$	$-\sin x$	come $\sin x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = 1/\cos^2 x$	quoziente sin/cos
$\arcsin x$, $\lvert x\rvert < 1$	$1/\sqrt{(1 - x^2)}$	inversa di sin in $[-\pi/2, \pi/2]$: $(f^{-1})'(y) = 1/\cos c = 1/\sqrt{(1 - y^2)}$
$\arccos x$, $\lvert x\rvert < 1$	$-1/\sqrt{(1 - x^2)}$	$\arccos x = \pi/2 - \arcsin x$
$\arctan x$	$1/(1 + x^2)$	inversa di tan: $1/(1 + \tan^2 c) = 1/(1 + y^2)$

Per x^n si verificano anche le derivate successive: $f' = n\,x^{n-1}$, $f'' = n(n-1)x^{n-2}$, …, $f^{(n)} = n!$, e $f^{(k)} = 0$ per $k > n$. Poiché l'esponenziale coincide con la propria derivata, è la funzione cui corrisponde il caso $f' = f$. Per $x^{1/2} = \sqrt{x}$ si ha $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$ per $x > 0$, ma la funzione non è derivabile in 0 perché $r(x) = 1/\sqrt{x}$ diverge; lo stesso vale per x^α con $0 < \alpha < 1$.

ESEMPIO

Derivata di x alla n. Ricavare $(x^n)' = n\,x^{n-1}$ per $n \in \mathbb{N}$.

1. Rapporto incrementale in un punto c.

$$r(x) = \frac{x^n - c^n}{x - c}$$

2. Per la scomposizione di una differenza di potenze, il numeratore si divide per $x - c$.

$$x^n - c^n = (x - c)(x^{n-1} + x^{n-2}c + \ldots + xc^{n-2} + c^{n-1})$$

3. Dopo la semplificazione, il rapporto è una somma di n addendi.

$$r(x) = x^{n-1} + x^{n-2}c + \ldots + c^{n-1}$$

4. Per $x \to c$ ognuno degli n addendi tende a c^{n-1}.

$$r(x) \to n\,c^{n-1}$$

ESEMPIO

Derivata del seno. Ricavare $(\sin x)' = \cos x$.

1. Si usa la forma $R(h)$ e la formula di addizione del seno.

$$R(h) = \frac{\sin(c+h) - \sin c}{h} = \frac{\sin c\cos h + \cos c\sin h - \sin c}{h}$$

2. Si raccoglie $\sin c$ tra il primo e il terzo termine.

$$R(h) = \sin c \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos c \cdot \frac{\sin h}{h}$$

3. Per $h \to 0$ si usano i limiti notevoli: $(\cos h - 1)/h = -h \cdot (1 - \cos h)/h^2 \to 0 \cdot 1/2 = 0$ e $\sin h/h \to 1$.

$$R(h) \to \sin c \cdot 0 + \cos c \cdot 1 = \cos c$$

ESEMPIO

Derivata dell'arcotangente. Ricavare $(\arctan x)' = 1/(1 + x^2)$.

1. L'arcotangente è l'inversa di $f(x) = \tan x$ in $]-\pi/2, \pi/2[$. Si fissa y e si trova c con $\tan c = y$.

$$f(c) = \tan c = y$$

2. Si calcola $f'(c) = 1 + \tan^2 c$ e si usa $\tan c = y$.

$$f'(c) = 1 + \tan^2 c = 1 + y^2 \neq 0$$

3. Per la derivata della funzione inversa si prende il reciproco.

$$(\arctan)'(y) = \frac{1}{1+y^2}$$

DA RICORDARE

Le derivate di arcsin e arccos non esistono in ± 1: le funzioni sono continue ma le derivate divergono a $\pm\infty$ per $x \to \pm 1$. Questo si deduce dal teorema di prolungamento della derivata (capitolo 5).

Esempi di calcolo di derivate

Per le funzioni composte si procede dall'esterno verso l'interno: si deriva la funzione più esterna lasciando invariato il suo argomento, poi si moltiplica per la derivata dell'argomento.

ESEMPIO

Somma di termini. Calcolare la derivata di $f(x) = 3x^4 - \cos x + e^x$.

1. La derivata di una somma è la somma delle derivate, e le costanti moltiplicative escono.

$$f'(x) = 3\,(x^4)' - (\cos x)' + (e^x)'$$

2. Si sostituiscono le derivate elementari.

$$(x^4)' = 4x^3, \qquad (\cos x)' = -\sin x, \qquad (e^x)' = e^x$$

3. Si mettono insieme, attenti al segno del termine con il coseno.

$$f'(x) = 12x^3 + \sin x + e^x$$

ESEMPIO

Prodotto con una radice. Calcolare la derivata di $f(x) = (\cos x)\sqrt{x}$.

1. Regola del prodotto: $(uv)' = u'v + uv'$ con $u = \cos x$, $v = \sqrt{x}$.

$$u' = -\sin x, \qquad v' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2. Si sostituisce.

$$f'(x) = -\sin x \cdot \sqrt{x} + \cos x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

RISULTATO

$f'(x) = -\sin x\,\sqrt{x} + \cos x/(2\sqrt{x})$, per $x > 0$.

ESEMPIO

Quoziente. Calcolare la derivata di $f(x) = \tan x \,/\, x^2$.

1. Regola del quoziente con numeratore $u = \tan x$ e denominatore $v = x^2$.

$$u' = 1 + \tan^2 x, \qquad v' = 2x$$

2. Si applica $(u'v - uv')/v^2$.

$$f'(x) = \frac{(1 + \tan^2 x)\,x^2 - \tan x \cdot 2x}{x^4}$$

3. Si può raccogliere x al numeratore e semplificare con una potenza del denominatore.

$$f'(x) = \frac{x(1 + \tan^2 x) - 2\tan x}{x^3}$$

ESEMPIO

Composta con un polinomio. Calcolare la derivata di $f(x) = \sin(x^2 - 1)$.

1. Funzione esterna: il seno, la cui derivata è il coseno; argomento interno: $x^2 - 1$.

$$[\sin u]' = \cos u \cdot u'$$

2. Derivata dell'argomento.

$$u = x^2 - 1 \;\Rightarrow\; u' = 2x$$

3. Si moltiplica.

$$f'(x) = 2x\cos(x^2 - 1)$$

ESEMPIO

Esponenziale di una radice. Calcolare la derivata di $f(x) = e^{\sqrt{x}}$.

1. Esterna: e^u, con derivata e^u. Interna: $u = \sqrt{x}$.

$$u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2. Si moltiplica.

$$f'(x) = e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

RISULTATO

$f'(x) = e^{\sqrt{x}}/(2\sqrt{x})$, per $x > 0$.

ESEMPIO

Arcotangente di una frazione. Calcolare la derivata di $f(x) = \arctan(2x/(x^2 - 1))$.

1. Esterna: arctan u, con derivata $1/(1 + u^2)$. Interna: $u = 2x/(x^2 - 1)$.

$$[\arctan u]' = \frac{u'}{1+u^2}$$

2. Si calcola u' con la regola del quoziente.

$$u' = \frac{2(x^2-1) - 2x \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x^2-2}{(x^2-1)^2} = \frac{-2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$$

3. Si sostituisce nel fattore $1/(1 + u^2)$ e si porta il denominatore comune.

$$1 + u^2 = 1 + \frac{4x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{(x^2-1)^2 + 4x^2}{(x^2-1)^2}$$

4. Si sviluppa il numeratore: si ottiene un quadrato perfetto.

$$(x^2-1)^2 + 4x^2 = x^4 - 2x^2 + 1 + 4x^2 = x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2+1)^2$$

5. Si mette insieme: i quadrati $(x^2 - 1)^2$ si semplificano.

$$f'(x) = \frac{(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2} \cdot \frac{-2(x^2+1)}{(x^2-1)^2} = \frac{-2}{x^2+1}$$

RISULTATO

$f'(x) = -2/(x^2 + 1)$ per $x \neq \pm 1$.

ESEMPIO

Logaritmo di una differenza con radice. Calcolare la derivata di $f(x) = \log(x^2 - \sqrt{(x + 1)})$.

1. Esterna: log u, con derivata u'/u. Interna: $u = x^2 - \sqrt{(x + 1)}$.

$$[\log u]' = \frac{u'}{u}$$

2. Derivata dell'interna: la radice è una composta, $(\sqrt{(x + 1)})' = 1/(2\sqrt{(x + 1)})$.

$$u' = 2x - \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

3. Si divide per u.

$$f'(x) = \frac{2x - \frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{x^2 - \sqrt{x+1}}$$

ESEMPIO

Logaritmi annidati. Calcolare le derivate di $f(x) = \log(\log x)$ e di $g(x) = \log(\log(\log x))$.

1. Per f: la funzione esterna è il logaritmo di $u = \log x$, la cui derivata è $1/x$.

$$f'(x) = \frac{(\log x)'}{\log x} = \frac{1}{x \log x}$$

2. Per g si applica la stessa regola con $u = \log(\log x)$, la cui derivata è la f' appena calcolata.

$$g'(x) = \frac{u'}{u} = \frac{\frac{1}{x \log x}}{\log(\log x)}$$

3. Si semplifica la frazione.

$$g'(x) = \frac{1}{x \log x \log(\log x)}$$

ESEMPIO

Arcoseno di un polinomio. Calcolare la derivata di $f(x) = \arcsin(2 - x^2)$.

1. Esterna: arcsin u, con derivata $u'/\sqrt{(1 - u^2)}$. Interna: $u = 2 - x^2$.

$$u' = -2x$$

2. Si sostituisce.

$$f'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{1 - (2 - x^2)^2}}$$

ESEMPIO

Due funzioni inverse una dentro l'altra. Calcolare la derivata di $f(x) = \arcsin(\arctan x)$.

1. Esterna: arcsin u con $u = \arctan x$; la derivata di u è $1/(1 + x^2)$.

$$[\arcsin u]' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$$

2. Si sostituisce u e u'.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \arctan^2 x}\,(1 + x^2)}$$

ESEMPIO

Esponenziale con esponente prodotto. Calcolare la derivata di $f(x) = e^{x^2 \cos x}$.

1. Esterna: e^u, con derivata e^u. Interna: $u = x^2 \cos x$, prodotto.

$$u' = 2x\cos x + x^2(-\sin x) = 2x\cos x - x^2 \sin x$$

2. Si moltiplica.

$$f'(x) = e^{x^2 \cos x}(2x\cos x - x^2 \sin x)$$

ESEMPIO

Logaritmo con valore assoluto. Calcolare la derivata di $f(x) = \log|2x/(x-1)|$.

1. Si usa $(\log|u|)' = u'/u$ con $u = 2x/(x-1)$, definita per $x \neq 1$ e $x \neq 0$.
2. Derivata di u con la regola del quoziente.

$$u' = \frac{2(x-1)-2x}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

3. Si divide per u: dividere per una frazione significa moltiplicare per la frazione inversa.

$$\frac{u'}{u} = \frac{-2}{(x-1)^2} \cdot \frac{x-1}{2x} = \frac{-1}{x(x-1)}$$

4. Si può anche scomporre in fratti semplici: il risultato coincide con una differenza.

$$\frac{-1}{x(x-1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$$

ESEMPIO

Potenze, esponenziali, composte di composte. Calcolare le derivate di $\sin^3 x$ e di $\exp(e^x)$.

1. Per $\sin^3 x = (\sin x)^3$: esterna u^3, derivata $3u^2$; interna $u = \sin x$, derivata $\cos x$.

$$(\sin^3 x)' = 3\sin^2 x \cos x$$

2. Per $\exp(e^x)$: esterna e^u, interna $u = e^x$ con derivata e^x.

$$(e^{e^x})' = e^{e^x} \cdot e^x$$

ESEMPIO

Una funzione elevata a una funzione. Calcolare la derivata di $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$.

1. Si riscrive con l'esponenziale, per $\sin x > 0$.

$$f(x) = e^{\cos x \log(\sin x)}$$

2. Si deriva l'esponente con la regola del prodotto: $(\cos x)' = -\sin x$ e $(\log \sin x)' = \cos x/\sin x$.

$$[\cos x \log \sin x]' = -\sin x \log \sin x + \cos x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}$$

3. Si moltiplica per la funzione originale.

$$f'(x) = (\sin x)^{\cos x}\left(-\sin x \log \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right)$$

CAPITOLO 5

Applicazioni del calcolo differenziale

I teoremi di Fermat, Rolle e Lagrange collegano il segno della derivata al comportamento della funzione. Se ne ricavano i criteri di monotonia, la ricerca degli estremi, lo studio della convessità e, con de L'Hôpital, un metodo per i limiti. Il capitolo si chiude con lo studio completo di una funzione.

Monotonia locale

DEFINIZIONE

Teorema di monotonia locale. Se $f'(c) > 0$ (risp. $f'(c) < 0$), allora f è crescente (risp. decrescente) nel punto c. Infatti per la permanenza del segno $r(x) > 0$ (< 0) in un intorno di c e si applica il teorema del capitolo 1.

Il viceversa non vale: $f(x) = x^3$ è crescente in $c = 0$ ma $f'(0) = 0$. Si può solo dire che se f è crescente (decrescente) in c, allora $f'(c) \geq 0$ (≤ 0).

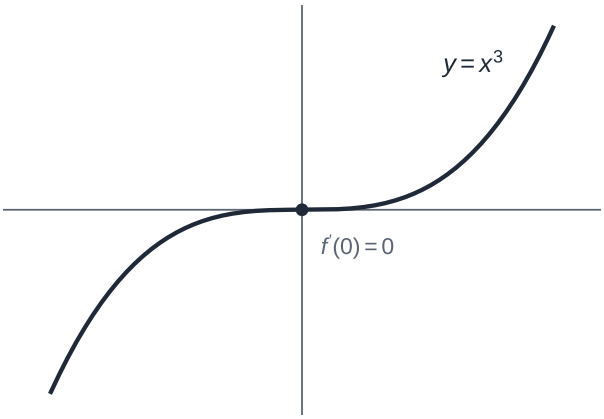

Figura 1. La funzione x^3 ha derivata nulla in 0 ma è strettamente crescente: l'annullarsi della derivata non basta per avere un estremo.

Teorema di Fermat

DEFINIZIONE

Teorema di Fermat. Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, sia $c \in]a, b[$ un punto di minimo o di massimo relativo e f derivabile in c. Allora $f'(c) = 0$.

ESEMPIO

Dimostrazione. Si tratta il caso del massimo relativo; il minimo è analogo.

1. Poiché c è interno, la derivata è il limite del rapporto incrementale sia da sinistra sia da destra, e i due limiti coincidono con $f'(c)$.

$$f'(c) = f'_-(c) = f'_+(c)$$

2. Se c è un punto di massimo relativo, in un intorno di c si ha $f(x) - f(c) \leq 0$: il numeratore del rapporto incrementale è negativo o nullo.

$$f(x) - f(c) \leq 0$$

3. A sinistra di c il denominatore $x - c$ è negativo: il rapporto (negativo diviso negativo) è non negativo, e così il suo limite.

$$f'(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

4. A destra di c il denominatore è positivo: il rapporto (negativo diviso positivo) è non positivo, e così il suo limite.

$$f'(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

5. Il numero $f'(c)$ è allo stesso tempo maggiore o uguale e minore o uguale a zero.

$$f'(c) = 0$$

Osservazioni. (1) Il teorema non si inverte: $f(x) = x^3$ in $c = 0$ ha $f'(0) = 0$ ma non è di estremo; $f'(c) = 0$ è una condizione necessaria, non sufficiente. (2) Non vale per i punti non interni: $f(x) = x$ in $[0, 1]$ ha massimo in 1 con $f'(1) = 1$. (3) Non vale se f non è derivabile in c: $|x|$ ha un minimo in 0. I punti c con $f'(c) = 0$ si dicono stazionari (o critici); gli estremi relativi, se la funzione è derivabile, vanno cercati tra i punti stazionari; altrimenti anche tra i punti di non derivabilità.

Teoremi di Rolle e Lagrange

DEFINIZIONE

Teorema di Rolle. Sia f continua in $[a, b]$, derivabile in $]a, b[$ e con $f(a) = f(b)$. Allora esiste $c \in]a, b[$ tale che $f'(c) = 0$.

ESEMPIO

Dimostrazione. Si usa il teorema di Weierstrass e quello di Fermat.

1. Per Weierstrass f ha minimo m e massimo M, assunti in $x_1, x_2 \in [a, b]$.
2. Primo caso: i due punti sono gli estremi dell'intervallo ($x_1 = a$ e $x_2 = b$, o viceversa). Poiché $f(a) = f(b)$, si ha $m = M$.

$$m = M \Rightarrow f \text{ costante} \Rightarrow f' = 0 \text{ ovunque}$$

3. Secondo caso: almeno uno dei due punti è interno a $]a, b[$. In un punto interno di minimo o di massimo la derivata è nulla per il teorema di Fermat.

$$f'(x_1) = 0 \quad \text{o} \quad f'(x_2) = 0$$

DEFINIZIONE

Teorema di Lagrange. Sia f continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$. Allora esiste $c \in]a, b[$ tale che $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$, cioè $f'(c) = (f(b) - f(a))/(b - a)$: esiste un punto in cui la tangente è parallela alla corda.

ESEMPIO

Dimostrazione. Si applica Rolle alla funzione ausiliaria $g(x) = (f(b) - f(a))x + (a - b)f(x)$, continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$.

1. Si calcola $g(a)$, sviluppando il prodotto.
$$g(a) = (f(b) - f(a))\,a + (a - b)f(a) = af(b) - af(a) + af(a) - bf(a) = af(b) - bf(a)$$
2. Si calcola $g(b)$ allo stesso modo.
$$g(b) = (f(b) - f(a))\,b + (a - b)f(b) = bf(b) - bf(a) + af(b) - bf(b) = af(b) - bf(a)$$
3. I due valori coincidono: $g(a) = g(b)$. Per Rolle esiste $c \in]a, b[$ con $g'(c) = 0$.
4. Si deriva g e si impone $g'(c) = 0$.
$$g'(x) = f(b) - f(a) + (a - b)f'(x) \;\Rightarrow\; f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

Conseguenze del teorema di Lagrange

CRITERIO DI MONOTONIA

DEFINIZIONE

Criterio di monotonia. Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile. Se $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$, allora f è crescente in (a, b). Se $f'(x) > 0$ per ogni x, f è strettamente crescente. Analogamente per $f' \leq 0$ (decrescente).

ESEMPIO

Dimostrazione. Si prendono $x < y$ in (a, b) e si applica Lagrange in $[x, y]$.

1. Per Lagrange esiste $c \in]x, y[$ con
$$f(y) - f(x) = f'(c)\,(y - x)$$
2. Per ipotesi $f'(c) \geq 0$, e $y - x > 0$, quindi il prodotto è non negativo.
$$f(y) - f(x) \geq 0 \;\Rightarrow\; f(y) \geq f(x)$$
3. Se $f' > 0$ ovunque il prodotto è strettamente positivo, e si ottiene $f(y) > f(x)$.

La condizione $f' > 0$ è sufficiente ma troppo restrittiva: x^3 è strettamente crescente anche se $f'(0) = 0$, e $f(x) = x^5$ ha derivata $5x^4 \geq 0$.

DEFINIZIONE

Criterio di stretta monotonia. Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile. Condizione necessaria e sufficiente affinché f sia strettamente crescente è che $f'(x) \geq 0$ per ogni x e che non esista alcun intervallo $(c, d) \subseteq (a, b)$ con $f'(x) = 0$ per ogni $x \in (c, d)$. Non si dimostra.

DEFINIZIONE

Funzioni con derivata nulla. Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è derivabile e $f'(x) = 0$ per ogni $x \in (a, b)$, allora f è costante.

Dimostrazione: per $x < y$, per Lagrange $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) = 0$. L'ipotesi che il dominio sia un intervallo è fondamentale: $f = 2$ in $[0, 1]$ e $f = 6$ in $[4, 5]$ ha derivata nulla ma non è costante. Altra dimostrazione: $f' \geq 0$ e $f' \leq 0$

danno f crescente e decrescente, quindi costante.

TEOREMA DI PROLUNGAMENTO DELLA DERIVATA

DEFINIZIONE

Teorema. Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua in $c \in (a, b)$ e derivabile in $(a, b)\setminus\{c\}$. Se esiste $\lim_{x\to c} f'(x) = l$ ($l \in \mathbb{R}$ oppure $\pm\infty$), allora $\lim_{x\to c} r(x) = l$, dove r è il rapporto incrementale in c. Quindi se l è finito, f è derivabile in c e $f'(c) = l$.

Dimostrazione: per Lagrange in $[c, x]$ (o $[x, c]$), $r(x) = f'(\xi_x)$ con ξ_x compreso tra c e x; se $x \to c$ anche $\xi_x \to c$, e quindi $r(x) \to l$.

ESEMPIO

Applicazione: arcoseno agli estremi. Stabilire se arcsin è derivabile in $x = 1$.

1. L'arcoseno è continuo in $[-1, 1]$ e derivabile in $]-1, 1[$ con derivata $1/\sqrt{(1 - x^2)}$.
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
2. Si calcola il limite della derivata per $x \to 1^-$: il radicando tende a 0^+.
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$
3. Per il teorema il rapporto incrementale diverge a $+\infty$: arcsin non è derivabile in 1 (tangente verticale). Lo stesso vale in -1 e per arccos.

IL CASO DELLA DERIVATA CHE NON AMMETTE LIMITE

Il teorema fornisce una condizione sufficiente ma non necessaria. La funzione $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ per $x \neq 0$, $f(0) = 0$, è continua in 0 e derivabile in 0, ma la derivata non ha limite.

ESEMPIO

Derivabile in 0 senza limite della derivata. Studiare $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ per $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

1. Derivata in 0 con la definizione: rapporto incrementale.
$$r(x) = \frac{x^2\sin(1/x) - 0}{x} = x\sin\frac{1}{x}$$
2. Il seno è limitato tra -1 e 1 e $x \to 0$: prodotto di infinitesimo per limitata.
$$|x\sin(1/x)| \le |x| \to 0 \;\Rightarrow\; f'(0) = 0$$
3. Derivata per $x \neq 0$ con regola del prodotto e della composta.
$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$
4. Per $x \to 0$ il primo termine tende a 0 ma $\cos(1/x)$ oscilla tra -1 e 1: $f'(x)$ non ha limite.

RISULTATO

f è derivabile in 0 con $f'(0) = 0$ anche se $\lim_{x\to 0} f'(x)$ non esiste. Per i punti sospetti, se $\lim f'$ esiste si conclude con il teorema, altrimenti si calcola il limite del rapporto incrementale.

Estremi relativi

STUDIO DEI PUNTI STAZIONARI

Sia f derivabile in (a, b) e $c \in]a, b[$ con $f'(c) = 0$. Dai criteri di monotonia:

- se $f' < 0$ in un intorno sinistro di c e $f' > 0$ in un intorno destro, c è un punto di minimo relativo;
- se $f' > 0$ a sinistra e $f' < 0$ a destra, c è un punto di massimo relativo;
- se f' non cambia segno in c, c non è di estremo.

Infatti nel primo caso, in $]c - r, c]$ f è strettamente decrescente, quindi $f(x) \geq f(c)$, e in $[c, c + r[$ è strettamente crescente, quindi $f(x) \geq f(c)$.

CRITERIO DELLA DERIVATA SECONDA

Se esiste $f''(c)$ (e $f'(c) = 0$): se $f''(c) > 0$, c è di minimo relativo; se $f''(c) < 0$, c è di massimo relativo. Infatti $f''(c) > 0$ significa che f' è crescente in c dove vale zero, quindi $f' < 0$ a sinistra e $f' > 0$ a destra. Se $f''(c) = 0$ il criterio non decide. In sintesi: se $f'(c) \neq 0$ la funzione è crescente o decrescente in c; se $f'(c) = 0$ e $f''(c) \neq 0$, c è di estremo relativo.

ESEMPIO

Punto stazionario. Studiare $f(x) = 4x^2 - x + 1$ in $c = 1/8$.

1. Si calcola la derivata prima e si verifica che si annulla in c.

$$f'(x) = 8x - 1 \Rightarrow f'\left(\frac{1}{8}\right) = 1 - 1 = 0$$

2. Si calcola la derivata seconda.

$$f''(x) = 8 > 0$$

3. Derivata prima nulla e seconda positiva.

RISULTATO

$c = 1/8$ è un punto di minimo relativo.

ESEMPIO

Punto non stazionario. Studiare $f(x) = 6x^3 - 2x^2 - 4$ in $c = 1$.

1. Derivata prima in c.

$$f'(x) = 18x^2 - 4x \Rightarrow f'(1) = 18 - 4 = 14 \neq 0$$

2. La derivata prima non è nulla: il punto non è stazionario, quindi non può essere di estremo. Poiché $f'(1) > 0$ la funzione è crescente.

3. Derivata seconda in c: determina la convessità.

$$f''(x) = 36x - 4 \Rightarrow f''(1) = 32 > 0$$

RISULTATO

In $c = 1$ la funzione è crescente e convessa.

ESEMPIO

Derivata seconda positiva ma punto non stazionario. Studiare $f(x) = 3x^4 + x - 2$ in $c = 2$.

1. Prima si controlla la derivata prima: il criterio della derivata seconda richiede $f'(c) = 0$.

$$f'(x) = 12x^3 + 1 \Rightarrow f'(2) = 96 + 1 = 97 \neq 0$$

2. Il punto non è stazionario: la funzione cresce. Anche se la derivata seconda è positiva, non si può parlare di minimo.

$$f''(x) = 36x^2 \Rightarrow f''(2) = 144 > 0$$

RISULTATO

In $c = 2$ la funzione è crescente e convessa, e non ha un minimo.

ESEMPIO

Funzione con logaritmo. Studiare $f(x) = \log(x/(2x + 1))$ in $c = -1$.

1. In $x = -1$ l'argomento vale $(-1)/(-1) = 1 > 0$, quindi il punto è nel dominio. Si riscrive la derivata del logaritmo come u'/u con $u = x/(2x + 1)$.

$$u' = \frac{(2x+1) - 2x}{(2x+1)^2} = \frac{1}{(2x+1)^2}$$

2. Si divide per u e si semplifica.

$$f'(x) = \frac{u'}{u} = \frac{1}{(2x+1)^2} \cdot \frac{2x+1}{x} = \frac{1}{x(2x+1)}$$

3. Valore in $c = -1$: la derivata non è nulla.

$$f'(-1) = \frac{1}{(-1)(-1)} = 1 \neq 0$$

4. Derivata seconda: si deriva $(2x^2 + x)^{-1}$ come composta.

$$f''(x) = -\frac{4x+1}{(2x^2+x)^2} \Rightarrow f''(-1) = -\frac{-3}{1} = 3 > 0$$

RISULTATO

In $c = -1$ la funzione è crescente e convessa.

Ricerca degli estremi assoluti

Sia f continua in $[a, b]$: per Weierstrass esistono minimo e massimo assoluti. Se un punto di estremo assoluto è interno, in esso la derivata, se esiste, è nulla (Fermat); altrimenti è un punto di non derivabilità o un estremo dell'intervallo. Si cerca quindi in tre insiemi:

$$A = \{c \in]a, b[: f'(c) = 0\}, \qquad B = \{c \in]a, b[: \nexists f'(c)\}, \qquad C = \{a, b\}$$

e si confrontano i valori di f in tutti i punti trovati. Per determinare A e B si deriva negli intervalli aperti, calcolando poi i limiti destro e sinistro della derivata nei punti sospetti.

ESEMPIO

Polinomio di secondo grado. Trovare minimo e massimo assoluti di $f(x) = x^2 - x + 1$ in $[0, 2]$.

1. Punti stazionari interni: si risolve $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \in]0, 2[$$

2. Non ci sono punti di non derivabilità. Gli insiemi sono

$$A = \left\{\frac{1}{2}\right\}, \qquad B = \varnothing, \qquad C = \{0, 2\}$$

3. Si calcola f nei quattro punti, uno per volta.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4}, \qquad f(0) = 1, \qquad f(2) = 4 - 2 + 1 = 3$$

4. Si confrontano i valori: il più piccolo è il minimo, il più grande è il massimo.

RISULTATO

Minimo 3/4 (in $x = 1/2$) e massimo 3 (in $x = 2$).

ESEMPIO

Funzione con valore assoluto, primo esempio. Trovare minimo e massimo assoluti di $f(x) = x^2 - 4x + 3|x| + 2$ in $[-1, 3]$.

1. Si elimina il valore assoluto distinguendo i due casi. Per $x \geq 0$, $|x| = x$.

$$f(x) = x^2 - 4x + 3x + 2 = x^2 - x + 2$$

2. Per $x < 0$, $|x| = -x$.

$$f(x) = x^2 - 4x - 3x + 2 = x^2 - 7x + 2$$

3. Derivata per $x < 0$: si annulla in $x = 7/2$, che non appartiene a $]-1, 0[$, quindi non va considerato.

$$f'(x) = 2x - 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{2} \notin]-1, 0[$$

4. Derivata per $x > 0$: si annulla in $x = 1/2$, che appartiene a $]0, 3[$.

$$f'(x) = 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \in]0, 3[$$

5. Nel punto di raccordo $x = 0$ si calcolano le derivate sinistra e destra.

$$f'_-(0) = 2 \cdot 0 - 7 = -7, \qquad f'_+(0) = 2 \cdot 0 - 1 = -1$$

6. Le derivate sinistra e destra sono diverse: f non è derivabile in 0, che sta in B.

$$A = \left\{\frac{1}{2}\right\}, \qquad B = \{0\}, \qquad C = \{-1, 3\}$$

7. Valori della funzione nei punti trovati (per $x = -1$ si usa la legge per $x < 0$).

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 2 = \frac{7}{4}, \quad f(0) = 2, \quad f(-1) = 1 + 7 + 2 = 10, \quad f(3) = 9 - 3 + 2 = 8$$

RISULTATO

Minimo 7/4 e massimo 10.

ESEMPIO

Funzione con valore assoluto, secondo esempio. Trovare minimo e massimo assoluti di $f(x) = x^2 - 2x + |x - 3| + 1$ in $[1, 4]$.

1. Il valore assoluto cambia legge in $x = 3$. Per $x < 3$, $|x - 3| = 3 - x$.
$$f(x) = x^2 - 2x + 3 - x + 1 = x^2 - 3x + 4$$
2. Per $x \geq 3$, $|x - 3| = x - 3$.
$$f(x) = x^2 - 2x + x - 3 + 1 = x^2 - x - 2$$
3. Derivate nei due intervalli aperti e zeri.
$$f'(x) = 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \in]1, 3[; \qquad f'(x) = 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \notin]3, 4[$$
4. In $x = 3$ si confrontano le derivate laterali.
$$f'_-(3) = 2 \cdot 3 - 3 = 3, \qquad f'_+(3) = 2 \cdot 3 - 1 = 5$$
5. Sono diverse: $3 \in B$. Gli insiemi sono
$$A = \left\{\frac{3}{2}\right\}, \qquad B = \{3\}, \qquad C = \{1, 4\}$$
6. Valori nei punti trovati.
$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 4 = \frac{7}{4}, \quad f(3) = 9 - 9 + 4 = 4, \quad f(1) = 1 - 3 + 4 = 2, \quad f(4) = 16 - 4 - 2 = 10$$

RISULTATO

Minimo 7/4 e massimo 10.

ESEMPIO

Funzione con valore assoluto di un trinomio. Trovare minimo e massimo assoluti di $f(x) = |x^2 - 3x| + 2x^2 - x + 1$ in $[-1, 4]$.

1. Segno di $x^2 - 3x = x(x - 3)$: positivo per $x < 0$ oppure $x > 3$, negativo in $]0, 3[$. Per $x < 0$ oppure $x > 3$ il valore assoluto non cambia nulla.
$$f(x) = x^2 - 3x + 2x^2 - x + 1 = 3x^2 - 4x + 1$$
2. Per $0 < x < 3$ il valore assoluto cambia segno all'argomento.
$$f(x) = -x^2 + 3x + 2x^2 - x + 1 = x^2 + 2x + 1$$
3. Derivata del primo ramo: si annulla in $x = 2/3$, che non cade né in $]-1, 0[$ né in $]3, 4[$.
$$f'(x) = 6x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$
4. Derivata del secondo ramo: si annulla in $x = -1$, che non cade in $]0, 3[$.
$$f'(x) = 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1$$
5. Quindi non ci sono punti stazionari interni. I punti $x = 0$ e $x = 3$ hanno derivate laterali diverse: in 0 valgono -4 (sinistra) e 2 (destra), in 3 valgono 8 (sinistra) e 14 (destra).
$$A = \varnothing, \qquad B = \{0, 3\}, \qquad C = \{-1, 4\}$$

6. Valori nei quattro punti.

$$f(0)=1,\quad f(3)=9+6+1=16,\quad f(-1)=3+4+1=8,\quad f(4)=48-16+1=33$$

RISULTATO

Minimo 1 e massimo 33.

DA RICORDARE

Si deriva sempre in intervalli aperti. Nei punti in cui la funzione cambia espressione si calcolano i limiti destro e sinistro della derivata; se coincidono la funzione è derivabile (se f è continua, per il teorema di prolungamento della derivata), altrimenti il punto sta in B.

Convessità

Una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è convessa se il suo epigrafico è un insieme convesso, cioè se $f(tx + (1 - t)y) \le t\, f(x) + (1 - t)\, f(y)$ per ogni $x, y \in (a, b)$ e $t \in [0, 1]$ (capitolo 1).

CONVESSITÀ IN UN PUNTO

Sia f derivabile in c e $t : y = f(c) + f'(c)(x - c)$ la tangente in $(c, f(c))$. La tangente divide il piano nel semipiano superiore $S^+ = \{(x, y) \mid y \ge f(c) + f'(c)(x - c)\}$ e in quello inferiore S^-.

DEFINIZIONE

Convessità locale. f è convessa nel punto c se esiste $r > 0$ tale che per $x \in]c - r, c + r[$ si ha $f(x) \ge f(c) + f'(c)(x - c)$, cioè il grafico sta sopra la tangente; è concava in c se sta sotto. Se in c non è né convessa né concava, c è un punto di flesso; è un flesso proprio se f è convessa a sinistra e concava a destra di c o viceversa.

Una funzione è convessa (concava) in (a, b) se e solo se lo è in ogni punto, quindi lo studio puntuale permette di riconoscere la convessità globale.

DEFINIZIONE

Teorema. Sia f derivabile in (a, b) e $c \in (a, b)$ con $f'(c) > 0$. Allora f è convessa in c (analogamente $f'(c) < 0$ implica concava).

ESEMPIO

Dimostrazione. Si considera la differenza tra la funzione e la sua tangente e si prova che è non negativa vicino a c.

1. Si pone

$$F(x) = f(x) - f(c) - f'(c)(x - c)$$

2. Si calcola il valore in c e le derivate: la tangente contribuisce solo alla derivata prima.

$$F(c) = 0, \qquad F'(x) = f'(x) - f'(c) \Rightarrow F'(c) = 0, \qquad F''(c) = f''(c) > 0$$

3. Per il criterio della derivata seconda F ha in c un minimo relativo.

$$F(x) \ge F(c) = 0 \ \text{ in un intorno di } c$$

4. Da $F \ge 0$ si ottiene $f(x) \ge f(c) + f'(c)(x - c)$: il grafico sta sopra la tangente.

In un punto di flesso in cui esiste f'', si ha $f''(c) = 0$. Se f ha derivata seconda in (a, b), i flessi vanno cercati tra i punti con $f''(c) = 0$, e c è di flesso proprio se f'' cambia segno in c.

ESEMPIO

Convessità di x quadro e x cubo. Stabilire la convessità di $f(x) = x^2$ e di $f(x) = x^3$.

1. Per x^2: derivata seconda costante positiva, quindi il grafico sta sopra ogni tangente.
$$f''(x) = 2 > 0$$
2. Per x^3: derivata seconda.
$$f''(x) = 6x$$
3. Il segno di $6x$ cambia in $x = 0$: negativo a sinistra, positivo a destra.
$$x < 0 : \ f'' < 0 \text{ (concava)}, \qquad x > 0 : \ f'' > 0 \text{ (convessa)}$$

RISULTATO

x^2 è convessa su tutto $\mathbb{R}$; x^3 ha in 0 un flesso proprio, concava per $x < 0$ e convessa per $x > 0$.

Teorema di de L'Hôpital

DEFINIZIONE

Teorema di de L'Hôpital. Siano $f, g : (a, b) \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ derivabili tali che: (i) $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0$ oppure $\lim f = \lim g = \infty$; (ii) $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a, b) \setminus \{c\}$; (iii) esiste $\lim_{x \to c} f'(x)/g'(x) = l$ ($l \in \mathbb{R}$ oppure $\pm\infty$). Allora (j) $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a, b) \setminus \{c\}$ e (jj) $\lim_{x \to c} f(x)/g(x) = l$.

Si enuncia allo stesso modo per $x \to c^+, c^-, \pm\infty$. Perché in (j) g non si annulla: nel caso 0/0, se $g(x_0) = 0$ per qualche $x_0 \neq c$, si considera la funzione $G(x) = g(x)$ per $x \neq c$ e $G(c) = 0$, continua in $[x_0, c]$ e derivabile in $]x_0, c[$ con $G(x_0) = G(c) = 0$; per Rolle esisterebbe x' con $g'(x') = 0$, contro (ii).

OSSERVAZIONI

SITUAZIONE	ESEMPIO	ESITO
Esiste lim f/g ma non lim f'/g'	$f = x^2 \sin(1/x)$, $g = x$ per $x \to 0$	$f/g = x \sin(1/x) \to 0$, mentre $f'/g' = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ non ha limite
Teorema inopportuno	$\lim_{x \to 0} \sin x/x$	il rapporto delle derivate è $\cos x \to 1$, ma per derivare $\sin x$ serviva già questo limite
Teorema inutile	$\lim_{x \to +\infty} 3^x/2^x$	si scrive $(3/2)^x \to +\infty$; il rapporto delle derivate $3^x \log 3/(2^x \log 2)$ non semplifica
Non applicabile alle successioni	$a_n = e^{2n^2+1}/(n^2 + 4)$	non si deriva rispetto a n: si considera $\lim_{x \to +\infty} e^{2x^2+1}/(x^2 + 4)$, che per de L'Hôpital vale $+\infty$, e per il teorema ponte $a_n \to +\infty$

ESEMPIO

Forma 0 per infinito. Calcolare $\lim_{x\to 0^+} x \log x$ e dedurne il limite di x^x.

1. Il limite è nella forma $0 \cdot \infty$. Si riscrive il prodotto come frazione, in modo da avere la forma ∞/∞.
$$x\log x = \frac{\log x}{1/x}$$
2. Si derivano numeratore e denominatore separatamente (non il quoziente).
$$\frac{(\log x)'}{(1/x)'} = \frac{1/x}{-1/x^2}$$
3. Si semplifica la frazione: dividere per $-1/x^2$ equivale a moltiplicare per $-x^2$.
$$\frac{1}{x}\cdot(-x^2) = -x \to 0$$
4. Dunque $x \log x \to 0$. Per il limite di x^x si usa $x^x = e^{x \log x}$ e la continuità dell'esponenziale.
$$x^x = e^{x\log x} \to e^0 = 1$$

RISULTATO

$x \log x \to 0$ e $x^x \to 1$: la discontinuità di x^x in 0 è eliminabile, e $g(x) = x^x$ per $x > 0$, $g(0) = 1$ è continua in $[0, +\infty[$.

ESEMPIO

Potenza per logaritmo. Calcolare $\lim_{x\to 0^+} x^m \log x$, con $m > 0$.

1. Forma $0 \cdot \infty$. Si riscrive come $\log x / x^{-m}$ (forma ∞/∞).
$$x^m\log x = \frac{\log x}{x^{-m}}$$
2. Si derivano numeratore e denominatore.
$$\frac{1/x}{-m\,x^{-m-1}}$$
3. Si semplifica: x^{-m-1} si porta a numeratore con esponente cambiato.
$$\frac{1}{x}\cdot\frac{x^{m+1}}{-m} = -\frac{x^m}{m} \to 0$$

RISULTATO

Il limite è 0 per ogni $m > 0$.

ESEMPIO

Esponenziale contro potenza. Calcolare $\lim_{x\to+\infty} a^x/x^n$, con $a > 1$ e $n \in \mathbb{N}$.

1. Forma ∞/∞. Prima applicazione: derivata di numeratore e denominatore.
$$\frac{a^x\log a}{n\,x^{n-1}}$$
2. È ancora ∞/∞ (se $n \geq 2$). Si applica di nuovo il teorema, e così via, per n volte in tutto: a ogni passo l'esponente di x scende di 1 e compare un fattore $\log a$.
$$\frac{a^x(\log a)^2}{n(n-1)\,x^{n-2}} \to \cdots \to \frac{a^x(\log a)^n}{n!}$$

3. Alla fine il denominatore è una costante e il numeratore diverge, perché $\log a > 0$.

$$\frac{a^x (\log a)^n}{n!} \to +\infty$$

RISULTATO

Il limite è +∞: l'esponenziale è un infinito di ordine superiore a ogni potenza.

ESEMPIO

Due applicazioni di seguito. Calcolare $\lim_{x \to 0} (e^x - 1 - x)/x^2$.

1. Per $x \to 0$ numeratore e denominatore tendono a 0: forma 0/0. Prima derivazione.

$$\frac{e^x - 1}{2x}$$

2. Il rapporto delle derivate è ancora 0/0. Seconda derivazione.

$$\frac{e^x}{2} \to \frac{1}{2}$$

3. Il limite delle derivate esiste, quindi è anche il limite iniziale.

RISULTATO

Il limite è 1/2.

ESEMPIO

Un'altra forma indeterminata. Calcolare $\lim_{x \to +\infty} \log x/\sqrt{x}$.

1. Forma ∞/∞. Si derivano numeratore e denominatore.

$$\frac{1/x}{1/(2\sqrt{x})}$$

2. Si dividono le due frazioni.

$$\frac{1}{x} \cdot 2\sqrt{x} = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

3. Il risultato tende a zero.

$$\frac{2}{\sqrt{x}} \to 0$$

RISULTATO

Il limite è 0: il logaritmo cresce più lentamente di ogni potenza.

ASINTOTI OBLIQUI

Se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty$ e $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = m \in \mathbb{R}$, per de L'Hôpital $\lim f(x)/x = \lim f'(x)/1 = m$, che è subito il coefficiente angolare dell'eventuale asintoto obliquo.

Rette tangenti

L'equazione della tangente al grafico in $(c, f(c))$ è $y = f(c) + f'(c)(x - c)$. Se f non è derivabile in c ma esistono $f'_-(c)$ e $f'_+(c)$ diverse, c è un punto angoloso e ci sono due semitangenti: $y = f(c) + f'_-(c)(x - c)$ da sinistra e $y = f(c) + f'_+(c)(x - c)$ da destra.

ESEMPIO

Tangente in un punto con valore assoluto. Per $f(x) = |x^2 - 1| - 2x^2 + 3x$ scrivere la tangente in $c = 0$, in $c = 1$ e in $c = 2$.

1. Si elimina il valore assoluto. Per $|x| \geq 1$ l'argomento $x^2 - 1$ è non negativo.
$$f(x) = x^2 - 1 - 2x^2 + 3x = -x^2 + 3x - 1$$
2. Per $|x| < 1$ l'argomento è negativo e cambia segno.
$$f(x) = 1 - x^2 - 2x^2 + 3x = 1 + 3x - 3x^2$$
3. In $c = 0$ vale la seconda legge: valore e derivata.
$$f(0) = 1, \qquad f'(x) = 3 - 6x \Rightarrow f'(0) = 3$$
4. Tangente in 0.
$$y = 1 + 3(x - 0) = 1 + 3x$$
5. In $c = 1$ si cambia legge: si calcolano le derivate laterali, con la seconda legge a sinistra e la prima a destra. Il valore è $f(1) = -1 + 3 - 1 = 1$.
$$f'_-(1) = 3 - 6 \cdot 1 = -3, \qquad f'_+(1) = -2 \cdot 1 + 3 = 1$$
6. Le derivate sono diverse: punto angoloso, con due semitangenti.
$$y = 1 - 3(x - 1) \ \text{ da sinistra}, \qquad y = 1 + (x - 1) \ \text{ da destra}$$
7. In $c = 2$ vale la prima legge: valore e derivata.
$$f(2) = -4 + 6 - 1 = 1, \qquad f'(x) = -2x + 3 \Rightarrow f'(2) = -1$$
8. Tangente in 2.
$$y = 1 - (x - 2)$$

ESEMPIO

Tangente di un logaritmo con valore assoluto. Per $f(x) = \log(|x - 3| + 1)$ scrivere la tangente in $c = 1$, $c = 3$, $c = 4$.

1. Per $x < 3$ si ha $|x - 3| = 3 - x$, quindi $f(x) = \log(4 - x)$. Per $x > 3$, $|x - 3| = x - 3$ e $f(x) = \log(x - 2)$.
$$f(x) = \log(4 - x) \ \ (x < 3), \qquad f(x) = \log(x - 2) \ \ (x > 3)$$
2. In $c = 1$: valore e derivata della prima legge.
$$f(1) = \log 3, \qquad f'(x) = -\frac{1}{4 - x} \Rightarrow f'(1) = -\frac{1}{3}$$
3. Tangente in 1.
$$y = \log 3 - \frac{x - 1}{3}$$
4. In $c = 3$: valore $f(3) = \log 1 = 0$ e derivate laterali.
$$f'_-(3) = -\frac{1}{4 - 3} = -1, \qquad f'_+(3) = \frac{1}{3 - 2} = 1$$
5. Punto angoloso con due semitangenti.
$$y = -(x - 3) \ \text{ da sinistra}, \qquad y = x - 3 \ \text{ da destra}$$

6. In $c = 4$: seconda legge.

$$f(4) = \log 2, \qquad f'(x) = \frac{1}{x-2} \Rightarrow f'(4) = \frac{1}{2}$$

7. Tangente in 4.

$$y = \log 2 + \frac{x-4}{2}$$

Derivata della funzione inversa: esercizi

ESEMPIO

Esponenziale di un reciproco. Sia $f(x) = e^{1/(x-2)}$ su $]2, +\infty[$. Calcolare $(f^{-1})'(e^2)$.

1. Si calcola la derivata di f.

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \left(-\frac{1}{(x-2)^2}\right) = -\frac{e^{1/(x-2)}}{(x-2)^2}$$

2. La derivata è negativa per ogni x: f è strettamente decrescente, quindi invertibile.

3. Immagine: si calcolano i limiti agli estremi.

$$\lim_{x \to +\infty} f = e^0 = 1, \qquad \lim_{x \to 2^+} f = e^{+\infty} = +\infty \Rightarrow f(]2, +\infty[) =]1, +\infty[$$

4. Si trova c risolvendo $f(c) = e^2$: uguagliando gli esponenti.

$$\frac{1}{c-2} = 2 \Rightarrow c - 2 = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{5}{2}$$

5. Si calcola $f'(c)$ e si verifica che non sia nulla.

$$f'\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{e^2}{(1/2)^2} = -4e^2 \neq 0$$

6. Si prende il reciproco.

$$(f^{-1})'(e^2) = \frac{1}{f'(5/2)} = -\frac{1}{4e^2}$$

RISULTATO

$(f^{-1})'(e^2) = -1/(4e^2)$, con $f^{-1} :]1, +\infty[\to]2, +\infty[$.

ESEMPIO

Arcotangente di una radice. Sia $f(x) = \arctan \sqrt{(x+1)/(x-1)}$ in $]-\infty, -1[$. Calcolare $(f^{-1})'(\pi/6)$.

1. Derivata di f: si pone $u = (x+1)/(x-1)$, con $u' = -2/(x-1)^2$, e si ricorda $1 + u = 2x/(x-1)$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+u} \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' = \frac{x-1}{2x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2} = -\frac{1}{2x(x-1)\sqrt{u}}$$

2. Per $x < -1$: $x < 0$ e $x - 1 < 0$, quindi $x(x-1) > 0$ e la derivata è negativa: f è strettamente decrescente, invertibile.

3. Limiti agli estremi per l'immagine.

$$\lim_{x \to -\infty} f = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}, \qquad \lim_{x \to -1^-} f = \arctan 0 = 0 \Rightarrow f^{-1} : \,]0, \tfrac{\pi}{4}[\to]-\infty, -1[$$

4. Si risolve $f(x) = \pi/6$: si applica la tangente a entrambi i membri ($\tan(\pi/6) = 1/\sqrt{3}$) e si eleva al quadrato.

$$\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{3}$$

5. Si moltiplica per $3(x-1)$ e si risolve l'equazione di primo grado.

$$3x + 3 = x - 1 \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -2$$

6. Si calcola $f'(-2)$: qui $u = 1/3$ e $\sqrt{u} = 1/\sqrt{3}$.

$$f'(-2) = -\frac{1}{2(-2)(-3)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}} = -\frac{\sqrt{3}}{12} \neq 0$$

7. Si prende il reciproco e si razionalizza.

$$(f^{-1})'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{12}{\sqrt{3}} = -4\sqrt{3}$$

RISULTATO

$(f^{-1})'(\pi/6) = -4\sqrt{3}$.

Studio di una funzione

Studiare una funzione f significa ricavarne le proprietà dalla legge che la definisce. Il metodo consiste di cinque passi.

- **Insieme di definizione**, scrivendo il sistema di condizioni di esistenza (ricordando che un valore assoluto è un numero non negativo).
- **Limiti agli estremi**, continuità, discontinuità, limitatezza, asintoti.
- **Derivabilità e segno di f'**: monotonia ed estremi relativi.
- **Esistenza di f'' e suo segno**: convessità, concavità, flessi.
- **Grafico**, riassumendo i risultati in uno schema con i segni di f, f' e f''.

ESEMPIO PRELIMINARE: UN POLINOMIO

ESEMPIO

Studio di $x^3 - 3x$. Studiare $f(x) = x^3 - 3x$.

1. Dominio e continuità: è un polinomio, definito e continuo su tutto $\mathbb{R}$. È dispari perché $f(-x) = -f(x)$: il grafico è simmetrico rispetto all'origine.

$$f(-x) = -x^3 + 3x = -f(x)$$

2. Limiti agli estremi: conta il termine di grado massimo.

$$\lim_{x\to+\infty} f = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f = -\infty$$

3. Intersezioni con l'asse x: si raccoglie x e si risolve.

$$x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x = 0, \quad x = \pm\sqrt{3}$$

4. Derivata prima e suo segno: è un trinomio di secondo grado con coefficiente positivo, positivo fuori dalle radici.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1) > 0 \iff x < -1 \ \text{ oppure } \ x > 1$$

5. Quindi f cresce in $]-\infty, -1[$, decresce in $]-1, 1[$, cresce in $]1, +\infty[$. In $x = -1$ c'è un massimo relativo, in $x = 1$ un minimo relativo. Si calcolano i valori.

$$f(-1) = -1 + 3 = 2, \qquad f(1) = 1 - 3 = -2$$

6. Derivata seconda e suo segno.

$$f''(x) = 6x > 0 \iff x > 0$$

7. La funzione è concava per $x < 0$ e convessa per $x > 0$; $x = 0$ è un flesso, con $f(0) = 0$.

RISULTATO

Massimo relativo $(-1, 2)$, minimo relativo $(1, -2)$, flesso in $(0, 0)$.

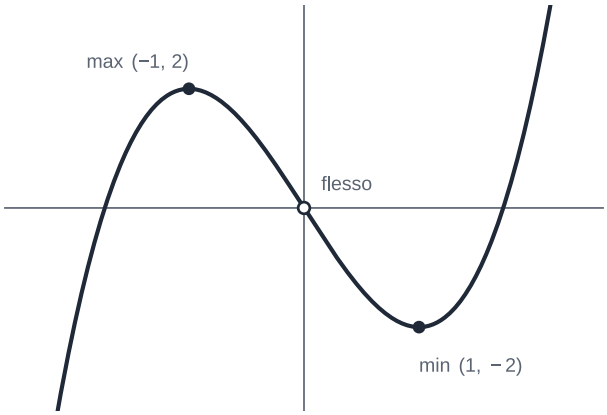

Figura 2. Grafico di $x^3 - 3x$: massimo relativo in $(-1, 2)$, minimo relativo in $(1, -2)$, flesso nell'origine.

Nello schema: + in f'' significa convessa, − concava; + in f' significa crescente, − decrescente. Il simbolo ↗ indica una funzione crescente, ↘ decrescente, ‖ un punto fuori dal dominio.

	$]-\infty, -1[$	-1	$]-1, 0[$	0	$]0, 1[$	1	$]1, +\infty[$
f''	−	−	−	0	+	+	+
f'	+	0	−	−	−	0	+
f	↗	max	↘	flesso	↘	min	↗

ESEMPIO 1: ARCOTANGENTE DI UNA FUNZIONE RAZIONALE

ESEMPIO

Studio di arctan((x² + 1)/x). Studiare $f(x) = \arctan((x^2 + 1)/x)$.

1. Dominio: l'arcotangente è definita su tutto $\mathbb{R}$, quindi basta che sia definito l'argomento: il denominatore non si annulla. Dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. La funzione è composta di funzioni continue, quindi continua nel dominio.

$$x \neq 0$$

2. Limitatezza e segno: l'arcotangente ha valori in $]-\pi/2, \pi/2[$ e ha lo stesso segno dell'argomento, che ha il segno di x (il numeratore è sempre positivo).

$$-\frac{\pi}{2} < f < \frac{\pi}{2}, \qquad f > 0 \text{ per } x > 0, \quad f < 0 \text{ per } x < 0$$

3. Simmetria: l'argomento è dispari, e l'arcotangente è dispari, quindi $f(-x) = -f(x)$.

$$f(-x) = \arctan\frac{x^2+1}{-x} = -f(x)$$

4. Limiti all'infinito: l'argomento $(x^2 + 1)/x$ ha il numeratore di grado maggiore, quindi diverge con il segno di x.

$$\frac{x^2+1}{x} \to \pm\infty \ \text{ per } x \to \pm\infty \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f = \pm\frac{\pi}{2}$$

5. Limiti in $x = 0$: il numeratore tende a 1, il denominatore a 0^+ da destra e a 0^- da sinistra.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+1}{x} = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to 0^-} f = -\frac{\pi}{2}$$

6. Conclusioni sui limiti: le rette $y = \pm\pi/2$ sono asintoti orizzontali (sinistro e destro); $x = 0$ è un punto di discontinuità di prima specie, con salto $\pi/2 - (-\pi/2) = \pi$.

ESEMPIO

Derivata prima di arctan((x² + 1)/x). Calcolo e segno di f'.

1. Derivata dell'argomento $u = (x^2 + 1)/x = x + 1/x$.

$$u' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$$

2. Fattore dell'arcotangente: $1 + u^2$ con denominatore comune.

$$1 + u^2 = 1 + \frac{(x^2+1)^2}{x^2} = \frac{x^2 + x^4 + 2x^2 + 1}{x^2} = \frac{x^4 + 3x^2 + 1}{x^2}$$

3. Si moltiplica u' per $1/(1 + u^2)$: i fattori x^2 si semplificano.

$$f'(x) = \frac{x^2}{x^4+3x^2+1} \cdot \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^4+3x^2+1}$$

4. Il denominatore è sempre positivo (somma di termini positivi), quindi il segno dipende dal numeratore $x^2 - 1$, che si annulla in $x = \pm 1$.

$$f' > 0 \iff x < -1 \ \text{ oppure } \ x > 1$$

5. Monotonia: f cresce in $]-\infty, -1[$ e in $]1, +\infty[$, decresce in $]-1, 0[$ e in $]0, 1[$. Quindi $x = -1$ è un massimo relativo e $x = 1$ un minimo relativo.

$$f(-1) = \arctan(-2), \qquad f(1) = \arctan 2$$

6. Comportamento in 0: la derivata ha lo stesso limite da entrambi i lati.

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \frac{-1}{1} = -1$$

ESEMPIO

Derivata seconda di arctan((x² + 1)/x). Calcolo e segno di f''.

1. Si deriva il quoziente $(x^2 - 1)/(x^4 + 3x^2 + 1)$: la derivata del denominatore è $4x^3 + 6x$.

$$f''(x) = \frac{2x(x^4+3x^2+1) - (x^2-1)(4x^3+6x)}{(x^4+3x^2+1)^2}$$

2. Si sviluppano separatamente i due prodotti al numeratore.

$$2x(x^4+3x^2+1) = 2x^5 + 6x^3 + 2x, \qquad (x^2-1)(4x^3+6x) = 4x^5 + 2x^3 - 6x$$

3 Si sottrae e si raccoglie $-2x$.

$$2x^5+6x^3+2x-4x^5-2x^3+6x=-2x^5+4x^3+8x=-2x\,(x^4-2x^2-4)$$

4 Il denominatore è un quadrato, positivo. Il segno dipende da $-2x$ e dal trinomio biquadratico x^4-2x^2-4, che con $t=x^2$ diventa t^2-2t-4 con radici:

$$t=1\pm\sqrt{5}\ \Rightarrow\ x^2=1+\sqrt{5}\ \ (\text{l'altra radice è negativa})$$

5 Posto $a=\sqrt{(1+\sqrt{5})}\approx 1{,}80$, il trinomio è positivo per $|x|>a$ e negativo per $|x|<a$. Si studia il segno del prodotto $-2x$ per il trinomio.

$$f''>0\ \text{ per } x<-a\ \text{ e per } 0<x<a;\qquad f''<0\ \text{ per }\ -a<x<0\ \text{ e per } x>a$$

6 Quindi f è convessa in $]-\infty,-a[$ e in $]0,a[$, concava in $]-a,0[$ e in $]a,+\infty[$. I punti $x=\pm a$ sono di flesso.

	$]-\infty,-a[$	$-a$	$]-a,-1[$	-1	$]-1,0[$	0	$]0,1[$	1	$]1,a[$	a	$]a,+\infty[$
f'	+	0	−	−	−	‖	+	+	+	0	−
f'	+	+	+	0	−	‖	−	0	+	+	+
f	↗	flesso	↗	max	↘	‖	↘	min	↗	flesso	↗

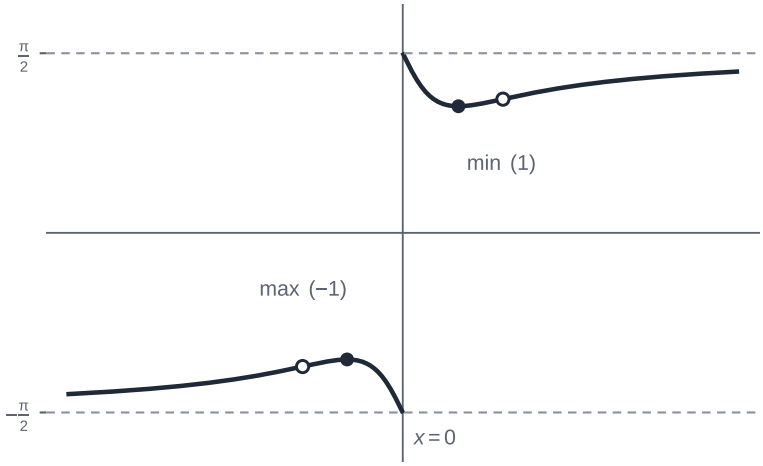

Figura 3. Grafico di arctan((x² + 1)/x): asintoti orizzontali y = ±π/2, discontinuità di prima specie in x = 0, un massimo relativo in −1 e un minimo relativo in 1. I cerchi vuoti sono i flessi in x = ±a.

ESEMPIO 2: ARCOTANGENTE DI UN QUOZIENTE

ESEMPIO

Studio di arctan(x/(x − 1)). Studiare $f(x)=\arctan(x/(x-1))$.

1 Dominio: il denominatore non si annulla, quindi $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. La funzione è continua nel dominio. Si osserva che $f(0)=\arctan 0=0$.

$$x\neq 1$$

2 Limiti all'infinito: l'argomento ha numeratore e denominatore dello stesso grado, quindi tende a 1.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-1}=1\ \Rightarrow\ \lim_{x\to\pm\infty}f=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$$

3 Asintoto orizzontale: $y=\pi/4$, sia a sinistra sia a destra.

4. Limiti in $x = 1$: il numeratore tende a 1, il denominatore a 0^+ da destra e a 0^- da sinistra.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x-1} = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to 1^+} f = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to 1^-} f = -\frac{\pi}{2}$$

5. Discontinuità di prima specie in $x = 1$, con salto π.

ESEMPIO

Derivata prima di arctan(x/(x − 1)). Calcolo e segno di f'.

1. Derivata dell'argomento $u = x/(x-1)$ con la regola del quoziente.

$$u' = \frac{(x-1)-x}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

2. Fattore $1/(1+u^2)$ con denominatore comune.

$$1 + u^2 = \frac{(x-1)^2 + x^2}{(x-1)^2}$$

3. Si moltiplica: i fattori $(x-1)^2$ si semplificano.

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2 + x^2} \cdot \frac{-1}{(x-1)^2} = -\frac{1}{(x-1)^2 + x^2}$$

4. Il denominatore è sempre positivo, quindi $f' < 0$ per ogni $x \neq 1$: f è strettamente decrescente in $]-\infty, 1[$ e in $]1, +\infty[$, e non ha estremi relativi.

ESEMPIO

Derivata seconda di arctan(x/(x − 1)). Calcolo e segno di f''.

1. Si pone $D(x) = (x-1)^2 + x^2 = 2x^2 - 2x + 1$, così che $f' = -1/D$ e $D' = 4x - 2$.

$$f'(x) = -D^{-1} \Rightarrow f''(x) = \frac{D'}{D^2}$$

2. Si sostituisce D' e si raccoglie 2.

$$f''(x) = \frac{4x-2}{D^2} = \frac{2(2x-1)}{((x-1)^2 + x^2)^2}$$

3. Il denominatore è un quadrato positivo. Il segno dipende da $2x - 1$.

$$f'' > 0 \iff x > \frac{1}{2}$$

4. Quindi f è concava in $]-\infty, 1/2[$ e convessa in $]1/2, 1[$ e in $]1, +\infty[$; $x = 1/2$ è un punto di flesso, con valore:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \arctan\frac{1/2}{-1/2} = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

	$]-\infty, 1/2[$	$1/2$	$]1/2, 1[$	1	$]1, +\infty[$
f''	−	0	+	‖	+
f'	−	−	−	‖	−
f	↘	flesso	↘	‖	↘

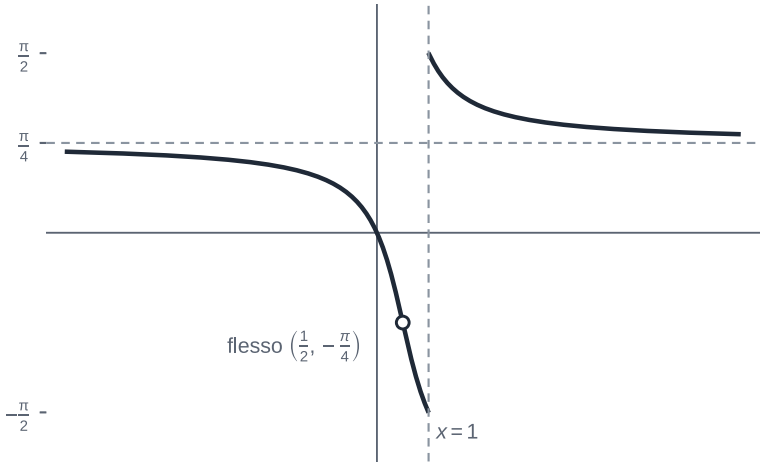

Figura 4. Grafico di arctan(x/(x − 1)): asintoto orizzontale y = π/4, discontinuità di prima specie in x = 1 con salto π, flesso in x = 1/2.

DA RICORDARE

Nello schema finale si riportano, su tre righe, i segni di f'', di f' e di f, con i punti significativi (zeri, discontinuità, punti stazionari) e l'andamento della funzione: da questo schema si disegna il grafico.