



NoiStudiamo

DISPENSA DI TEORIA



Elementi di Analisi Matematica 2

Integrali, equazioni differenziali lineari,
funzioni di due variabili e serie numeriche

A CURA DI

Damiano La Pusata

Ottobre 2026



Indice dei capitoli

Dalla primitiva alla serie di Taylor.

1. Integrali indefiniti e definiti	3
2. Equazioni differenziali	23
3. Funzioni di due variabili	37
4. Serie numeriche e serie di funzioni	54

Integrali indefiniti e definiti

Integrare è l'operazione inversa del derivare. Il capitolo parte dalle primitive e dai metodi per calcolarle, poi introduce l'integrale di Riemann come limite di somme e lo lega alle primitive con il teorema fondamentale del calcolo integrale.

Primitive e integrale indefinito

DEFINIZIONE

Primitiva. Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Una funzione $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in (a, b) è una primitiva di f in (a, b) se $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in (a, b)$.

Se F è una primitiva di f , anche $F + 5$ lo è, perché la derivata di una costante è zero. Una funzione che ha una primitiva ne ha dunque infinite. Il prossimo teorema dice che non ce ne sono altre.

DEFINIZIONE

Caratterizzazione delle primitive. Se F è una primitiva di f in (a, b) , allora tutte e sole le primitive di f in (a, b) sono le funzioni $F(x) + k$, al variare di k in $\mathbb{R}$.

DIMOSTRAZIONE

Prima parte. Se $k \in \mathbb{R}$ e $G(x) = F(x) + k$, allora $G'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$ in ogni punto, quindi G è una primitiva.

Seconda parte. Siano F e G due primitive di f e sia $H = G - F$. Per ogni x si ha

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Una funzione con derivata identicamente nulla in un intervallo è costante. Per vederlo, si prendono due punti $x_1 < x_2$ dell'intervallo e si applica il teorema di Lagrange a H in $[x_1, x_2]$: esiste $c \in (x_1, x_2)$ tale che $H(x_2) - H(x_1) = H'(c)(x_2 - x_1) = 0$. Dunque $H(x_1) = H(x_2)$, cioè H è costante e $G(x) = F(x) + k$.

DA RICORDARE

L'ipotesi che il dominio sia un intervallo è essenziale: su due intervalli separati la differenza di due primitive può essere una costante diversa su ciascun intervallo.

ESEMPIO

Una funzione senza primitive. Si consideri $f(x) = 1$ per $x \geq 0$ e $f(x) = -1$ per $x < 0$. Mostrare che f non ha primitive in $\mathbb{R}$.

- 1 Si procede per assurdo: sia F una primitiva di f in $\mathbb{R}$. Allora F è primitiva di f anche in $[0, +\infty[$ e in $]-\infty, 0]$.
- 2 In $[0, +\infty[$ una primitiva di f è $g(x) = x$. Per il teorema di caratterizzazione esiste k tale che $F(x) = x + k$ per $x \geq 0$. Allo stesso modo esiste c tale che $F(x) = -x + c$ per $x < 0$.
- 3 F è derivabile, quindi continua in 0: i limiti da destra e da sinistra coincidono.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = c, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = k \implies c = k$$

4

Dunque $F(x) = |x| + k$ per ogni x . Ma $|x|$ non è derivabile in 0, e questo è assurdo.

RISULTATO

La funzione f non ha primitive in $\mathbb{R}$: una funzione con un salto non è mai una derivata.

DEFINIZIONE

Integrale indefinito. L'integrale indefinito di f , indicato con $\int f(x) dx$, è l'insieme delle primitive di f (l'insieme vuoto se f non ne ha). Se F è una primitiva si scrive $\int f(x) dx = F(x) + k$, con $k \in \mathbb{R}$.

Dalla tabella delle derivate delle funzioni elementari si ricava una tabella di integrali immediati. Per la regola di derivazione delle funzioni composte, ogni riga resta valida se al posto di x si mette una funzione derivabile $f(x)$ e si moltiplica per $f'(x)$.

INTEGRALE IMMEDIATO	VERSIONE CON FUNZIONE COMPOSTA
$\int e^x dx = e^x + k$	$\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + k$
$\int \cos x dx = \sin x + k$	$\int \cos[f(x)] f'(x) dx = \sin f(x) + k$
$\int \sin x dx = -\cos x + k$	$\int \sin[f(x)] f'(x) dx = -\cos f(x) + k$
$\int x^\alpha dx = x^{\alpha+1}/(\alpha+1) + k$, con $\alpha \neq -1$	$\int [f(x)]^\alpha f'(x) dx = [f(x)]^{\alpha+1}/(\alpha+1) + k$
$\int (1/x) dx = \log x + k$	$\int f'(x)/f(x) dx = \log f(x) + k$
$\int 1/(x^2+1) dx = \arctan x + k$	$\int f'(x)/(f(x)^2+1) dx = \arctan f(x) + k$
$\int 1/\sqrt{1-x^2} dx = \arcsin x + k$	$\int f'(x)/\sqrt{1-f(x)^2} dx = \arcsin f(x) + k$

ESEMPIO

Riconoscere la derivata della funzione interna. Calcolare $\int 2x/(x^2+1) dx$ e $\int \tan x dx$.

1

Nel primo integrale il numeratore $2x$ è la derivata del denominatore $x^2 + 1$, che è sempre positivo. Vale quindi la regola f'/f con $f(x) = x^2 + 1$.

$$\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \log(x^2+1) + k$$

2

Per la tangente si scrive $\tan x = \sin x / \cos x$ e si osserva che $\sin x$ è l'opposto della derivata di $\cos x$.

$$\int \tan x dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx$$

3

Si applica la regola f'/f con $f(x) = \cos x$.

$$-\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\log|\cos x| + k$$

RISULTATO

$\int 2x/(x^2+1) dx = \log(x^2+1) + k$ e $\int \tan x dx = -\log|\cos x| + k$.

Proprietà e decomposizione in somma

DEFINIZIONE

Omogeneità. Se f ha primitive in (a, b) e $k \neq 0$, allora kf ha primitive in (a, b) e vale $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$. Il secondo membro indica l'insieme delle funzioni ottenute moltiplicando per k le primitive di f .

DIMOSTRAZIONE

Sia $F \in \int kf(x) dx$. Allora $F'(x) = kf(x)$ in ogni punto. Si pone $G = F/k$, ben definita perché $k \neq 0$. Si ha $G'(x) = F'(x)/k = f(x)$, quindi G è una primitiva di f e $F = kG$ appartiene al secondo membro.

Viceversa, se $F = kG$ con G primitiva di f , allora $F'(x) = kG'(x) = kf(x)$, quindi $F \in \int kf(x) dx$.

DA RICORDARE

Perché $k \neq 0$. Per $k = 0$ la proprietà è falsa: il primo membro è l'integrale della funzione nulla, cioè tutte le costanti, mentre il secondo è la sola funzione nulla.

DEFINIZIONE

Proprietà distributiva. Se f e g hanno primitive in (a, b) , anche $f + g$ ne ha, e $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$, intendendo l'insieme delle somme di una primitiva di f e una di g .

Insieme, le due proprietà danno il **metodo di decomposizione in somma**: se f e g hanno primitive e h, k sono numeri non entrambi nulli, allora

$$\int (hf(x) + kg(x)) dx = h \int f(x) dx + k \int g(x) dx.$$

ESEMPIO

Decomposizione in somma. Calcolare $\int (3x^2 - 4 \cos x + 5/x) dx$ per $x > 0$.

- 1 Si separa l'integrale nella somma di tre integrali immediati, portando fuori le costanti.

$$\int (3x^2 - 4\cos x + \frac{5}{x}) dx = 3 \int x^2 dx - 4 \int \cos x dx + 5 \int \frac{1}{x} dx$$

- 2 Si usa la tabella: la primitiva di x^2 è $x^3/3$, quella di $\cos x$ è $\sin x$, quella di $1/x$ è $\log x$ per $x > 0$.

$$= 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 4 \sin x + 5 \log x + k$$

- 3 Si semplifica il primo termine.

$$= x^3 - 4 \sin x + 5 \log x + k$$

RISULTATO

$$\int (3x^2 - 4 \cos x + 5/x) dx = x^3 - 4 \sin x + 5 \log x + k.$$

Le costanti additive prodotte dai singoli integrali si fondono in un'unica costante k . Se l'integrale contiene e^{cx} con $c \neq 0$, la derivata di cx vale c e si usa l'omogeneità: $\int e^{cx} dx = e^{cx}/c + k$, $\int \cos(cx) dx = \sin(cx)/c + k$, $\int \sin(cx) dx = -\cos(cx)/c + k$.

Integrazione per parti

DEFINIZIONE

Integrazione per parti. Siano f, g derivabili in (a, b) . Se $f g'$ ha primitive in (a, b) , allora anche $f' g$ ne ha, e $\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$.

DIMOSTRAZIONE

Per la regola di derivazione del prodotto, $D[f g] = f' g + f g'$, quindi in ogni punto

$$f(x) g'(x) = D[f(x) g(x)] - f'(x) g(x).$$

La funzione $f g$ è una primitiva di $D[f g]$. Per l'ipotesi, $f g'$ ha primitive, quindi per differenza (proprietà distributiva) ne ha anche $f' g$. Applicando la decomposizione in somma si ottiene la formula.

La funzione f si chiama **fattore finito** e g' **fattore differenziale**. Il metodo funziona quando nell'integranda c'è un fattore di cui si conosce una primitiva (g') e l'altro fattore (f) diventa più semplice derivandolo. In pratica: un polinomio moltiplicato per e^x , $\sin x$ o $\cos x$ si prende come fattore finito, perché derivando scende di grado; un logaritmo o un arcotangente si prende come fattore finito perché la derivata è razionale.

ESEMPIO

Polinomio per esponenziale. Calcolare $\int x^2 e^x dx$.

- 1 Si sceglie $f(x) = x^2$ come fattore finito e $g'(x) = e^x$ come fattore differenziale, con $g(x) = e^x$. Derivando, il grado di x^2 scende.

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx$$

- 2 Si ripete la formula sul nuovo integrale, con $f(x) = x$ e $g'(x) = e^x$.

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x$$

- 3 Si sostituisce nel primo risultato e si raccoglie e^x .

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + k = e^x(x^2 - 2x + 2) + k$$

RISULTATO

$$\int x^2 e^x dx = e^x(x^2 - 2x + 2) + k.$$

Con $x^n e^x$ bastano n integrazioni per parti, perché ogni passaggio abbassa di uno il grado e alla fine resta $\int e^x dx$. Scegliere invece e^x come fattore finito e x^n come differenziale sarebbe un errore: si arriverebbe a $\int e^x x^{n+1} dx$, più complicato dell'integrale di partenza.

ESEMPIO

Il logaritmo come fattore finito. Calcolare $\int \log x dx$ e $\int x^2 \log x dx$ per $x > 0$.

- 1 Per $\int \log x dx$ si scrive l'integranda come $1 \cdot \log x$ e si sceglie $g'(x) = 1$, $g(x) = x$ e $f(x) = \log x$, con $f'(x) = 1/x$.

$$\int \log x dx = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \log x - \int 1 dx$$

- 2 L'ultimo integrale è immediato.

$$\int \log x dx = x \log x - x + k = x(\log x - 1) + k$$

- 3 Per $\int x^2 \log x \, dx$ si sceglie $g'(x) = x^2$, con $g(x) = x^3/3$, e $f(x) = \log x$.

$$\int x^2 \log x \, dx = \frac{x^3}{3} \log x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

- 4 Si semplifica l'integranda e si integra la potenza.

$$= \frac{x^3}{3} \log x - \frac{1}{3} \int x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} \log x - \frac{x^3}{9} + k$$

RISULTATO

$\int \log x \, dx = x(\log x - 1) + k$ e $\int x^2 \log x \, dx = (x^3/3) \log x - x^3/9 + k$.

ESEMPIO

Integrazione per parti con ritorno all'integrale di partenza. Calcolare $\int e^x \sin x \, dx$.

- 1 Prima integrazione per parti, con $f(x) = \sin x$ e $g'(x) = e^x$.

$$I = \int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx$$

- 2 Seconda integrazione per parti sull'integrale rimasto, con $f(x) = \cos x$ e $g'(x) = e^x$.

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx = e^x \cos x + I$$

- 3 Si sostituisce: l'integrale incognito I ricompare, con segno meno.

$$I = e^x \sin x - e^x \cos x - I$$

- 4 Si porta I al primo membro e si divide per 2. Il risultato contiene una sola costante.

$$2I = e^x(\sin x - \cos x) \implies I = \frac{1}{2} e^x(\sin x - \cos x) + k$$

RISULTATO

$\int e^x \sin x \, dx = (1/2) e^x(\sin x - \cos x) + k$.

DA RICORDARE

Integrali che si ripresentano. Se dopo l'integrazione per parti si ottiene un'uguaglianza del tipo $\int f(x) \, dx = g(x) + c \int f(x) \, dx$ con $c \neq 1$, si può risolvere come un'equazione nell'incognita $\int f(x) \, dx$: si trova $\int f(x) \, dx = g(x)/(1 - c) + k$. Nell'esempio $c = -1$.

ESEMPIO

Un caso con parti e razionali: $1/(x^2+1)^2$. Calcolare $I_2 = \int dx/(x^2+1)^2$.

- 1 Si aggiunge e si toglie x^2 al numeratore, per far comparire il denominatore semplice.

$$I_2 = \int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^2} \, dx = \int \frac{1}{x^2+1} \, dx + \int \frac{-x^2}{(x^2+1)^2} \, dx$$

- 2 Il primo integrale è $\arctan x$. Per il secondo si nota che $-2x/(x^2+1)^2$ è la derivata di $1/(x^2+1)$ e si scrive $-x^2/(x^2+1)^2 = (1/2) x \cdot (-2x)/(x^2+1)^2$.

$$\int \frac{-x^2}{(x^2+1)^2} \, dx = \frac{1}{2} \int x \cdot \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \, dx$$

- 3 Si integra per parti con $f(x) = x$ e $g'(x) = -2x/(x^2+1)^2$, quindi $g(x) = 1/(x^2+1)$.

$$\frac{1}{2} \left[\frac{x}{x^2+1} - \int \frac{1}{x^2+1} dx \right] = \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2} \arctan x$$

- 4 Si somma al primo integrale.

$$I_2 = \arctan x + \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2} \arctan x + k$$

RISULTATO

$$\int dx/(x^2+1)^2 = (1/2) \arctan x + (1/2) x/(x^2+1) + k.$$

Integrazione per sostituzione

DEFINIZIONE

Prima formula di sostituzione. Siano $g : (a, b) \rightarrow (\alpha, \beta)$ derivabile e $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ dotata di primitive. Allora $f(g(x)) g'(x)$ ha primitive in (a, b) e $\int f(g(x)) g'(x) dx = [\int f(t) dt]_{t=g(x)}$, cioè si compongono con g le primitive di f .

DIMOSTRAZIONE

Sia F una primitiva di f e $G(x) = F(g(x))$. Per la derivazione della funzione composta $G'(x) = F'(g(x)) g'(x) = f(g(x)) g'(x)$, quindi G è una primitiva dell'integranda. Il primo membro vale dunque $G(x) + k$. Il secondo membro vale $F(t) + k$ calcolato in $t = g(x)$, cioè $F(g(x)) + k = G(x) + k$. I due membri coincidono.

Il metodo si usa quando nell'integranda si riconosce una funzione composta moltiplicata per la derivata della funzione interna. Si pone $t = g(x)$ e si ragiona come se $g'(x) dx$ fosse dt . Dopo aver calcolato l'integrale in t si torna alla variabile x .

ESEMPIO

Prima formula: tre integrali. Calcolare $\int x \cos(x^2+5) dx$, $\int e^x/(e^x+5) dx$ e $\int (\log x)/x dx$ per $x > 0$.

- 1 Primo integrale. La derivata di $x^2 + 5$ è $2x$: si inserisce il fattore 2 compensandolo con $1/2$.

$$\int x \cos(x^2 + 5) dx = \frac{1}{2} \int \cos(x^2 + 5) \cdot 2x dx$$

- 2 Si pone $t = x^2 + 5$, quindi $dt = 2x dx$, e si integra il coseno.

$$= \frac{1}{2} [\int \cos t dt]_{t=x^2+5} = \frac{1}{2} \sin(x^2 + 5) + k$$

- 3 Secondo integrale. La derivata di e^x è e^x , che compare al numeratore. Con $t = e^x$ si ha $dt = e^x dx$.

$$\int \frac{e^x}{e^x+5} dx = \left[\int \frac{1}{t+5} dt \right]_{t=e^x} = \log(e^x + 5) + k$$

- 4 Terzo integrale. La derivata di $\log x$ è $1/x$. Con $t = \log x$ si ha $dt = dx/x$.

$$\int \frac{\log x}{x} dx = \left[\int t dt \right]_{t=\log x} = \frac{1}{2} \log^2 x + k$$

RISULTATO

$$(1/2) \sin(x^2+5) + k, \log(e^x+5) + k \text{ e } (1/2) \log^2 x + k.$$

POLINOMI TRIGONOMETRICI

Si chiamano così gli integrali $\int \cos^n x \, dx$, $\int \sin^n x \, dx$ e $\int \cos^m x \sin^n x \, dx$ con m, n naturali. Due regole bastano per tutti i casi.

- **Esponente dispari.** Se $\cos$ ha esponente dispari, si stacca un $\cos x$, si scrive il resto con $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ e si pone $t = \sin x$. Se è $\sin$ ad avere esponente dispari si stacca un $\sin x$ e si pone $t = \cos x$.
- **Esponenti entrambi pari.** Si usano le formule di bisezione $\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2$ e $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$, eventualmente più volte.

ESEMPIO

Polinomi trigonometrici. Calcolare $\int \cos^3 x \sin^2 x \, dx$ e $\int \cos^2 x \sin^2 x \, dx$.

- 1 Nel primo integrale $\cos$ ha esponente dispari. Si stacca un $\cos x$ e si scrive $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

$$\int \cos^3 x \sin^2 x \, dx = \int (1 - \sin^2 x) \sin^2 x \cos x \, dx$$

- 2 Si pone $t = \sin x$, quindi $dt = \cos x \, dx$, e si integra il polinomio in t .

$$= \int (t^2 - t^4) dt \Big|_{t=\sin x} = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + k$$

- 3 Nel secondo integrale entrambi gli esponenti sono pari: si applicano le due bisezioni.

$$\int \cos^2 x \sin^2 x \, dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{4} \int (1 - \cos^2 2x) \, dx$$

- 4 Si bisseca ancora, con $\cos^2 2x = (1 + \cos 4x)/2$.

$$= \frac{1}{4} \int \left(1 - \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) dx = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 4x}{2} \right) dx$$

- 5 Si integra ricordando che $\int \cos(4x) \, dx = \sin(4x)/4$.

$$= \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + k$$

RISULTATO

$\int \cos^3 x \sin^2 x \, dx = \sin^3 x/3 - \sin^5 x/5 + k$ e $\int \cos^2 x \sin^2 x \, dx = x/8 - \sin(4x)/32 + k$.

SECONDA FORMULA DI SOSTITUZIONE

DEFINIZIONE

Seconda formula di sostituzione. Siano $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ dotata di primitive e $g: (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile con immagine (a, b) e invertibile. Allora $\int f(x) \, dx = \left[\int f(g(t)) g'(t) \, dt \right]_{t=g^{-1}(x)}$.

Dimostrazione. Dalla prima formula, applicata a $f(g(t)) g'(t)$, segue $\int f(g(t)) g'(t) \, dt = \left[\int f(x) \, dx \right]_{x=g(t)}$. Si compongono i due membri con $t = g^{-1}(x)$: a destra $x = g(g^{-1}(x))$ e si ottiene $\int f(x) \, dx$, come richiesto.

In pratica si inventa il cambio di variabile $x = g(t)$ che elimina la radice (o la difficoltà), si sostituisce $dx = g'(t) \, dt$, si integra in t e si torna a x con $t = g^{-1}(x)$.

ESEMPIO

Seconda formula: radice di un binomio. Calcolare $\int \sqrt{x+3} \, dx$ per $x \geq -3$ e $\int 1/(1+\sqrt{x}) \, dx$ per $x > 0$.

- 1 Primo integrale. Si pone $t = \sqrt{x+3}$, con $t \geq 0$. Ricavando x si ha $x = t^2 - 3$, quindi $g(t) = t^2 - 3$ e $dx = 2t \, dt$.

$$\int \sqrt{x+3} \, dx = \int t \cdot 2t \, dt \Big|_{t=\sqrt{x+3}} = \left[\frac{2t^3}{3} \right]_{t=\sqrt{x+3}}$$

- 2 Si torna alla variabile x .

$$\int \sqrt{x+3} \, dx = \frac{2}{3} (\sqrt{x+3})^3 + k$$

- 3 Secondo integrale. Si pone $t = \sqrt{x}$, quindi $x = t^2$ e $dx = 2t \, dt$. L'integranda diventa razionale.

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} \, dx = \left[\int \frac{2t}{1+t} \, dt \right]_{t=\sqrt{x}}$$

- 4 Si divide: $2t/(1+t) = 2 - 2/(1+t)$.

$$\int \frac{2t}{1+t} \, dt = \int \left(2 - \frac{2}{1+t} \right) dt = 2t - 2 \log(1+t)$$

- 5 Si torna a x .

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} \, dx = 2\sqrt{x} - 2 \log(1 + \sqrt{x}) + k$$

RISULTATO

$\int \sqrt{x+3} \, dx = (2/3)(\sqrt{x+3})^3 + k$ e $\int dx/(1+\sqrt{x}) \, dx = 2\sqrt{x} - 2 \log(1 + \sqrt{x}) + k$.

Un'altra classe riconducibile a funzioni razionali è quella delle radici di un rapporto. Se l'integranda è $\sqrt{(px+q)/(rx+s)}$ con $ps - qr \neq 0$ (altrimenti il rapporto è costante), si pone $t = \sqrt{(px+q)/(rx+s)}$ con $t \geq 0$. Ricavando x si ottiene

$$x = g(t) = \frac{st^2 - q}{p - rt^2}, \quad g'(t) = \frac{2(ps - qr)t}{(p - rt^2)^2}.$$

Poiché g' ha segno costante, g è invertibile e la seconda formula porta a $\int 2(ps - qr) t^2 / (p - rt^2)^2 \, dt$, integrale di una funzione razionale (si veda il paragrafo seguente).

Funzioni razionali fratte

Una funzione razionale fratta è $f(x) = a(x)/b(x)$ con a, b polinomi primi tra loro. Se il grado di a è maggiore o uguale a quello di b , si divide: $f(x) = q(x) + r(x)/b(x)$, con q polinomio ed r di grado minore di b . Basta quindi saper integrare i polinomi e le funzioni razionali **proprie**, in cui il grado del numeratore è minore di quello del denominatore.

DECOMPOSIZIONE IN FRATTI SEMPLICI

Sia m il grado di b . L'equazione $b(x) = 0$ ha m soluzioni complesse, contate con la molteplicità. Se α è una soluzione reale di molteplicità n , b è divisibile per $(x - \alpha)^n$. Se $k + ic$ è una soluzione complessa di molteplicità n , lo è anche la coniugata $k - ic$ e b è divisibile per $[(x - k)^2 + c^2]^n$. Dunque b è il prodotto di potenze di fattori di primo grado e di fattori di secondo grado con discriminante negativo. La funzione si scrive come somma di fratti semplici:

FATTORE DI $b(x)$	FRATTI SEMPLICI CORRISPONDENTI
$(x - \alpha)^n$	$A_1/(x - \alpha), A_2/(x - \alpha)^2, \dots, A_n/(x - \alpha)^n$
$[(x - k)^2 + c^2]^n$	$(A_1x + B_1)/[(x - k)^2 + c^2], \dots, (A_nx + B_n)/[(x - k)^2 + c^2]^n$

Per esempio, se $b(x) = x^3(x-2)(x^2+5)(x^2+1)^2$, compaiono i fratti A_1/x , A_2/x^2 , A_3/x^3 , $A_4/(x-2)$, $(C_1x+B_1)/(x^2+5)$, $(C_2x+B_2)/(x^2+1)$ e $(C_3x+B_3)/(x^2+1)^2$.

INTEGRAZIONE DEI FRATTI SEMPLICI

Per l'omogeneità si può porre $A = 1$. Il fratto di primo tipo si integra subito:

$$\int \frac{1}{x-c} dx = \log|x-c| + k, \quad \int \frac{1}{(x-c)^n} dx = \frac{1}{1-n} \frac{1}{(x-c)^{n-1}} + k \quad (n > 1).$$

Per il fratto di secondo tipo con $n = 1$ si può supporre $k = 0$ (con la prima formula di sostituzione) e si decompone in somma:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+c^2} dx = \frac{A}{2} \int \frac{2x}{x^2+c^2} dx + B \int \frac{1}{x^2+c^2} dx = \frac{A}{2} \log(x^2+c^2) + \frac{B}{c} \arctan \frac{x}{c} + k.$$

Il secondo addendo si ottiene scrivendo $1/(x^2+c^2) = (1/c^2) \cdot 1/((x/c)^2+1)$, con la sostituzione $t = x/c$ la cui derivata è $1/c$. Per $n = 2$ si procede come nell'esempio di $1/(x^2+1)^2$ del paragrafo sull'integrazione per parti: $\int x/(x^2+c^2)^2 dx = -(1/2) \cdot 1/(x^2+c^2)$ per sostituzione e

$$\int \frac{1}{(x^2+c^2)^2} dx = \frac{1}{2c^2} \left[\frac{x}{x^2+c^2} + \frac{1}{c} \arctan \frac{x}{c} \right] + k.$$

IL CASO DEL TRINOMIO

Per $f(x) = (ax+b)/(x^2+px+q)$ si calcola $\Delta = p^2 - 4q$ e si distinguono tre casi.

SEGNO DI Δ	DENOMINATORE	DECOMPOSIZIONE
$\Delta > 0$	$(x-x_1)(x-x_2)$, con $x_1 \neq x_2$	$A/(x-x_1) + B/(x-x_2)$
$\Delta = 0$	$(x-x_0)^2$	$A/(x-x_0) + B/(x-x_0)^2$
$\Delta < 0$	irriducibile	completamento del quadrato: $(x-k)^2 + c^2$

ESEMPIO

Trinomio con due radici reali. Calcolare $\int (x+4)/(x^2-x-6) dx$.

- Si scompone il denominatore: $x^2-x-6 = (x-3)(x+2)$. Il discriminante è positivo e si cercano due fratti semplici.

$$\frac{x+4}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} = \frac{(A+B)x+2A-3B}{x^2-x-6}$$

- Si uguagliano i coefficienti dei numeratori: coefficiente di x e termine noto.

$$A+B=1, \quad 2A-3B=4$$

- Dalla prima $B = 1 - A$. Sostituendo nella seconda: $2A - 3(1 - A) = 4$, cioè $5A = 7$.

$$A = \frac{7}{5}, \quad B = 1 - \frac{7}{5} = -\frac{2}{5}$$

- Si integrano i due fratti di primo tipo.

$$\int \frac{x+4}{x^2-x-6} dx = \frac{7}{5} \log|x-3| - \frac{2}{5} \log|x+2| + k$$

RISULTATO

$$\int (x+4)/(x^2-x-6) dx = (7/5) \log|x-3| - (2/5) \log|x+2| + k.$$

ESEMPIO

Trinomio con radice doppia. Calcolare $\int (x+4)/(x^2 - 2x + 1) dx$ per $x > 1$.

- 1 Il denominatore è $(x - 1)^2$. I fratti semplici sono $A/(x - 1)$ e $B/(x - 1)^2$.

$$\frac{x+4}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} = \frac{Ax-A+B}{(x-1)^2}$$

- 2 Si uguagliano i coefficienti: $A = 1$ e $-A + B = 4$, da cui $B = 5$.

$$\frac{x+4}{(x-1)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{5}{(x-1)^2}$$

- 3 Si integra: il secondo fratto ha primitiva $-5/(x - 1)$.

$$\int \frac{x+4}{(x-1)^2} dx = \log(x-1) - \frac{5}{x-1} + k$$

RISULTATO

$$\int (x+4)/(x-1)^2 dx = \log(x-1) - 5/(x-1) + k.$$

ESEMPIO

Trinomio con discriminante negativo. Calcolare $\int (x+4)/(x^2 + x + 4) dx$.

- 1 Il discriminante è $1 - 16 = -15 < 0$. La derivata del denominatore è $2x + 1$: si riscrive il numeratore come $(1/2)(2x + 1) + 7/2$. Infatti $(1/2)(2x + 1) + 7/2 = x + 4$.

$$\int \frac{x+4}{x^2+x+4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+4} dx + \frac{7}{2} \int \frac{1}{x^2+x+4} dx$$

- 2 Il primo integrale è del tipo f/f .

$$\frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+4} dx = \frac{1}{2} \log(x^2 + x + 4)$$

- 3 Nel secondo si completa il quadrato: $x^2 + x + 4 = (x + 1/2)^2 + 15/4$.

$$\frac{7}{2} \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{15}{4}} dx$$

- 4 Con $c = \sqrt{15}/2$ e la formula $\int dx/((x-k)^2+c^2) = (1/c) \arctan((x-k)/c)$, tenendo conto che $7/(2c) = 7/\sqrt{15}$.

$$\frac{7}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{15}} \arctan \frac{2}{\sqrt{15}} \left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{\sqrt{15}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{15}}$$

RISULTATO

$$\int (x+4)/(x^2+x+4) dx = (1/2) \log(x^2+x+4) + (7/\sqrt{15}) \arctan((2x+1)/\sqrt{15}) + k.$$

ESEMPIO

Fratto con denominatore al quadrato. Calcolare $\int (x+3)/(x^2+4)^2 dx$.

- 1 Si decompone in somma: la derivata di $x^2 + 4$ è $2x$, quindi $x/(x^2+4)^2$ si integra per sostituzione.

$$\int \frac{x+3}{(x^2+4)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{(x^2+4)^2} dx + 3 \int \frac{1}{(x^2+4)^2} dx$$

- 2 Primo addendo, con $t = x^2 + 4$.

$$\frac{1}{2} \int \frac{2x}{(x^2+4)^2} dx = \frac{1}{2} \left[\int \frac{1}{t^2} dt \right]_{t=x^2+4} = -\frac{1}{2(x^2+4)}$$

- 3 Secondo addendo, con la formula del caso $n = 2$ e $c = 2$: $1/(2c^2) = 1/8$.

$$3 \int \frac{1}{(x^2+4)^2} dx = \frac{3}{8} \left[\frac{x}{x^2+4} + \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} \right] = \frac{3x}{8(x^2+4)} + \frac{3}{16} \arctan \frac{x}{2}$$

- 4 Si sommano i due risultati.

$$\int \frac{x+3}{(x^2+4)^2} dx = -\frac{1}{2(x^2+4)} + \frac{3x}{8(x^2+4)} + \frac{3}{16} \arctan \frac{x}{2} + k$$

RISULTATO

$$-1/(2(x^2+4)) + 3x/(8(x^2+4)) + (3/16) \arctan(x/2) + k.$$

ESEMPIO

Funzione razionale impropria. Calcolare $\int (x^2+2)/(x-5) dx$ per $x > 5$ e $\int x^3/(x^2+2) dx$.

- 1 Nel primo integrale si somma e si sottrae 25 per ottenere una differenza di quadrati: $x^2 + 2 = (x^2 - 25) + 27$.

$$\frac{x^2+2}{x-5} = \frac{(x-5)(x+5)+27}{x-5} = x+5 + \frac{27}{x-5}$$

- 2 Si integra termine a termine.

$$\int \frac{x^2+2}{x-5} dx = \frac{x^2}{2} + 5x + 27 \log(x-5) + k$$

- 3 Nel secondo integrale $x^3 = x(x^2 + 2) - 2x$.

$$\frac{x^3}{x^2+2} = x - \frac{2x}{x^2+2}$$

- 4 Il secondo termine è del tipo f'/f .

$$\int \frac{x^3}{x^2+2} dx = \frac{x^2}{2} - \log(x^2+2) + k$$

RISULTATO

$$x^2/2 + 5x + 27 \log(x-5) + k \text{ e } x^2/2 - \log(x^2+2) + k.$$

INTEGRAZIONE PER RAZIONALIZZAZIONE

Con la prima formula di sostituzione molti integrali si riconducono a funzioni razionali. Il segreto è far comparire la derivata della funzione che si vuole prendere come nuova variabile: se manca, si moltiplica numeratore e denominatore per quella derivata.

ESEMPIO

Esponenziali e tangente. Calcolare $\int dx/(e^x+3)$ e $\int \tan x/(\tan x+1) dx$.

- 1 Primo integrale. Si moltiplica numeratore e denominatore per e^x , derivata di e^x .

$$\int \frac{1}{e^x+3} dx = \int \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x} dx$$

- 2 Si pone $t = e^x$, quindi $dt = e^x dx$. Il denominatore diventa $t^2 + 3t = t(t+3)$.

$$= \left[\int \frac{1}{t(t+3)} dt \right]_{t=e^x}$$

- 3 Fratti semplici: $1/(t(t+3)) = A/t + B/(t+3)$ con $A + B = 0$ e $3A = 1$, quindi $A = 1/3$ e $B = -1/3$.

$$\frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+3} \right) dt = \frac{1}{3} \log \frac{t}{t+3}$$

- 4 Si torna a x : $\log(e^x) = x$.

$$\int \frac{1}{e^x + 3} dx = \frac{1}{3} [x - \log(e^x + 3)] + k$$

- 5 Secondo integrale. La derivata di $\tan x$ è $1 + \tan^2 x$, quindi $dt = (1 + t^2) dx$ con $t = \tan x$, cioè $dx = dt/(1 + t^2)$.

$$\int \frac{\tan x}{\tan x + 1} dx = \left[\int \frac{t}{(t+1)(t^2+1)} dt \right]_{t=\tan x}$$

- 6 Fratti semplici: $t/((t+1)(t^2+1)) = A/(t+1) + (Bt+C)/(t^2+1)$. Si uguagliano i numeratori: $t = A(t^2+1) + (Bt+C)(t+1)$. Coefficienti di t^2 , t , termine noto.

$$A + B = 0, \quad B + C = 1, \quad A + C = 0 \implies A = -\frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{2}$$

- 7 Si integra: il fratto con t si spezza in un f/f e in un arcotangente.

$$-\frac{1}{2} \log|t+1| + \frac{1}{4} \log(t^2+1) + \frac{1}{2} \arctan t$$

RISULTATO

$(1/3)[x - \log(e^x + 3)] + k$ e, con $t = \tan x$, $-(1/2) \log|t+1| + (1/4) \log(t^2+1) + (1/2) \arctan t + k$.

ESEMPIO

Radice di un rapporto. Calcolare $\int \sqrt{(x+1)/(x-1)} dx$ per $x > 1$.

- 1 Si pone $t = \sqrt{(x+1)/(x-1)}$, con $t > 1$. Elevando al quadrato e risolvendo in x : $t^2(x-1) = x+1$, da cui $x(t^2-1) = t^2+1$.

$$x = g(t) = \frac{t^2+1}{t^2-1}, \quad g'(t) = \frac{2t(t^2-1) - 2t(t^2+1)}{(t^2-1)^2} = \frac{-4t}{(t^2-1)^2}$$

- 2 Poiché $g' < 0$ per $t > 1$, g è invertibile. Si applica la seconda formula.

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx = \left[\int t \cdot \frac{-4t}{(t^2-1)^2} dt \right]_{t=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} = \left[\int \frac{-4t^2}{(t-1)^2(t+1)^2} dt \right]$$

- 3 Fratti semplici: $-4t^2/((t-1)^2(t+1)^2) = A/(t-1) + B/(t-1)^2 + C/(t+1) + D/(t+1)^2$. Si calcolano i coefficienti (per esempio dando a t i valori 1 e -1 per B e D , poi altri due valori).

$$A = -1, \quad B = -1, \quad C = 1, \quad D = -1$$

- 4 Si integra: $\int 1/(t-1)^2 dt = -1/(t-1)$ e $\int 1/(t+1)^2 dt = -1/(t+1)$.

$$-\log|t-1| + \frac{1}{t-1} + \log|t+1| + \frac{1}{t+1} = \log \frac{t+1}{t-1} + \frac{2t}{t^2-1}$$

- 5 Si torna a x : $t^2 - 1 = 2/(x-1)$, quindi $2t/(t^2-1) = t(x-1) = \sqrt{x^2-1}$.

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx = \sqrt{x^2-1} + \log \frac{t+1}{t-1} + k, \quad t = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

RISULTATO

La primitiva è $\sqrt{x^2-1} + \log((t+1)/(t-1)) + k$ con $t = \sqrt{(x+1)/(x-1)}$ (derivando si ritrova l'integranda).

Primitive di funzioni definite a tratti

Se l'integranda è continua in $\mathbb{R}$ ma contiene un valore assoluto, ha due espressioni diverse su due semirette. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale (che si vede più avanti) ogni funzione continua in un intervallo ha primitive, quindi esiste una primitiva F definita in tutto $\mathbb{R}$ e derivabile in ogni punto, anche nel punto in cui cambia la legge.

DA RICORDARE

Metodo. 1. Si studia il segno dell'argomento del valore assoluto e si scrive f senza valore assoluto in ciascun intervallo. 2. In ogni intervallo si trova una primitiva, con una costante diversa (c_1, c_2). 3. Si impone la continuità di F nel punto di raccordo: i limiti da sinistra e da destra sono uguali. 4. Si impone il valore richiesto ($F(x_0) = y_0$) e si ricavano le costanti. 5. Si verifica che F coincida con f anche nel punto di raccordo (è automatico se f è continua).

ESEMPIO

Valore assoluto per esponenziale. Trovare la primitiva F in $\mathbb{R}$ di $f(x) = |x - 1| e^x$ tale che $F(0) = 2$.

- 1 Si scrive f senza valore assoluto: per $x \geq 1$ è $(x - 1) e^x$, per $x < 1$ è $-(x - 1) e^x = (1 - x) e^x$.
- 2 Si cerca una primitiva di $(x - 1) e^x$ per parti, con fattore finito $x - 1$ e differenziale e^x .
$$\int (x - 1) e^x dx = (x - 1) e^x - \int e^x dx = (x - 2) e^x$$
- 3 Dunque $F(x) = (x - 2) e^x + c_1$ per $x \geq 1$ e, cambiando segno, $F(x) = (2 - x) e^x + c_2$ per $x < 1$.
- 4 Continuità in $x = 1$: si uguagliano i valori delle due espressioni.
$$-e + c_1 = e + c_2 \implies c_1 = c_2 + 2e$$
- 5 Condizione $F(0) = 2$: 0 appartiene a $x < 1$, quindi si usa la seconda espressione.
$$F(0) = 2 + c_2 = 2 \implies c_2 = 0, \quad c_1 = 2e$$
- 6 Verifica in $x = 1$: da destra $F(1) = (1 - 1) e = 0$, da sinistra $F(1) = -(1 - 1) e = 0$, quindi F è derivabile.

RISULTATO

$F(x) = (x - 2) e^x + 2e$ per $x \geq 1$ e $F(x) = (2 - x) e^x$ per $x < 1$.

ESEMPIO

Esponente con valore assoluto. Trovare la primitiva F in $\mathbb{R}$ di $f(x) = e^{x-|x-1|}$ tale che $F(0) = 1$.

- 1 Per $x \geq 1$ l'esponente è $x - (x - 1) = 1$, quindi $f(x) = e$. Per $x < 1$ è $x - (1 - x) = 2x - 1$, quindi $f(x) = e^{2x-1}$.
- 2 Primitive nei due tratti, usando $\int e^{2x-1} dx = e^{2x-1}/2$.
$$F(x) = ex + c_1 \quad (x \geq 1), \quad F(x) = \frac{1}{2} e^{2x-1} + c_2 \quad (x < 1)$$
- 3 Continuità in $x = 1$: $e + c_1 = e/2 + c_2$, quindi $c_1 = c_2 - e/2$.
$$e + c_1 = \frac{1}{2} e^1 + c_2 \implies c_1 = c_2 - \frac{e}{2}$$
- 4 Condizione $F(0) = 1$, con $0 < 1$: si usa la seconda espressione.
$$F(0) = \frac{1}{2} e^{-1} + c_2 = 1 \implies c_2 = 1 - \frac{1}{2e}$$

$$c_1 = 1 - \frac{1}{2e} - \frac{e}{2}$$

RISULTATO

$F(x) = e x + 1 - 1/(2e) - e/2$ per $x \geq 1$ e $F(x) = e^{2x-1}/2 + 1 - 1/(2e)$ per $x < 1$.

Una variante frequente è una primitiva della funzione $x \mapsto x^2 e^{|x^3|+2}$ e simili: la simmetria della funzione e il segno di x^3 dicono subito dove cambia legge (in $x = 0$). Il metodo è sempre lo stesso.

Integrale definito secondo Riemann

Due insiemi numerici A e B sono **separati** se $a \leq b$ per ogni $a \in A$ e $b \in B$. In tal caso $\sup A \leq \inf B$ e ogni $c \in [\sup A, \inf B]$ è un **elemento di separazione**. Se $\sup A = \inf B$ l'elemento di separazione è unico e gli insiemi si dicono **contigui**. Equivalentemente A e B sono contigui se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $a \in A$ e $b \in B$ con $b - a < \varepsilon$.

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Una **decomposizione** di $[a, b]$ è un insieme $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ con $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. I punti x_i si chiamano capisaldi e $|D| = \max(x_i - x_{i-1})$ è l'ampiezza.

In ogni intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ la funzione, essendo continua, ha minimo e massimo assoluti (Weierstrass). Siano y_i e z_i i punti in cui f assume rispettivamente il minimo e il massimo.

DEFINIZIONE

Somme inferiori e superiori. La **somma inferiore** e la **somma superiore** di f relative a D sono $s(f, D) = \sum_{i=1}^n f(y_i)(x_i - x_{i-1})$ e $S(f, D) = \sum_{i=1}^n f(z_i)(x_i - x_{i-1})$.

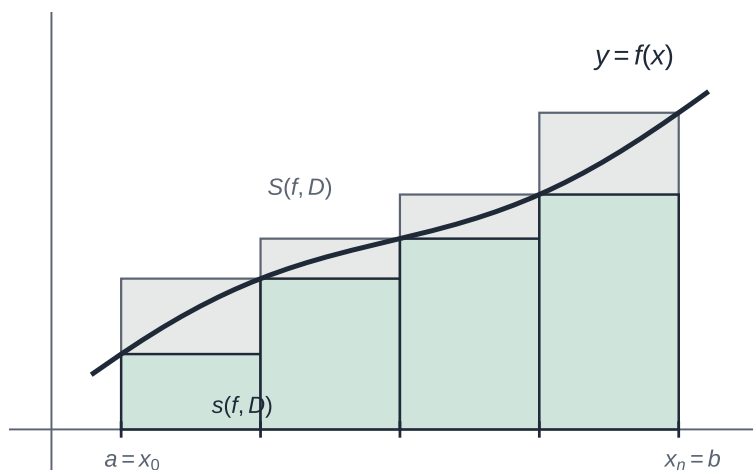


Figura 1. La somma inferiore (rettangoli scuri) e la somma superiore (rettangoli chiari) di una funzione crescente relative a una decomposizione in quattro parti.

Al variare di D le somme descrivono due insiemi numerici: l'insieme A_i delle somme inferiori e l'insieme A_s delle somme superiori. Si prova che $s(f, D_1) \leq S(f, D_2)$ per ogni coppia di decomposizioni, quindi i due insiemi sono separati e $\sup A_i \leq \inf A_s$.

DEFINIZIONE

Contiguità delle somme. Se f è continua in $[a, b]$, gli insiemi delle somme inferiori e superiori sono contigui.

DIMOSTRAZIONE

Bisogna provare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una decomposizione D con $S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon$. Fissato ε , poiché f è continua in $[a, b]$ è uniformemente continua (teorema di Cantor). Applicando la definizione con $\varepsilon/(b-a)$ si trova $\delta > 0$ tale che

$$x, y \in [a, b], |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Si sceglie una decomposizione D con $|D| < \delta$. In ciascun intervallo $|z_i - y_i| < \delta$, quindi $f(z_i) - f(y_i) < \varepsilon/(b-a)$. Allora

$$S(f, D) - s(f, D) = \sum_{i=1}^n (f(z_i) - f(y_i))(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon.$$

DEFINIZIONE

Integrale definito. Il numero $\sup A_i = \inf A_s$ si chiama integrale definito (secondo Riemann) di f in $[a, b]$ e si indica con $\int_a^b f(x) dx$.

ESEMPIO

Somme inferiori e superiori di $f(x) = x$. Calcolare $\int_0^1 x dx$ con la definizione, usando la decomposizione in n parti uguali.

1 I capisaldi sono $x_i = i/n$ e ogni intervallo ha ampiezza $1/n$. Poiché x è crescente, il minimo in $[x_{i-1}, x_i]$ è $x_{i-1} = (i-1)/n$ e il massimo è $x_i = i/n$.

2 Somma inferiore: si usa $\sum_{i=1}^n (i-1) = n(n-1)/2$.

$$s(f, D) = \sum_{i=1}^n \frac{i-1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n-1}{2n}$$

3 Somma superiore: si usa $\sum_{i=1}^n i = n(n+1)/2$.

$$S(f, D) = \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}$$

4 La differenza è $S - s = 1/n$, che tende a zero. Gli insiemi sono contigui e l'elemento di separazione è il limite comune, $1/2$.

$$\frac{n-1}{2n} \leq \int_0^1 x dx \leq \frac{n+1}{2n} \implies \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

RISULTATO

$\int_0^1 x dx = 1/2$, come l'area del triangolo di base e altezza 1.

Se $f(x) = k$ per ogni x , per ogni decomposizione $s(f, D) = S(f, D) = k(b-a)$, quindi $\int_a^b k dx = k(b-a)$ (per $k > 0$ è l'area del rettangolo). Il valore dell'integrale dipende da f , a e b ma non dal nome della variabile: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$. Si pone poi $\int_a^a f = 0$ e, se $a > b$, $\int_a^b f = -\int_b^a f$.

Proprietà dell'integrale definito

Le proprietà seguenti valgono per f, g continue in un intervallo (α, β) e $a, b, c \in (\alpha, \beta)$. Le prime due si enunciano senza dimostrazione, le altre si dimostrano a partire dalla definizione.

PROPRIETÀ

ENUNCIATO

Additività

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f, \text{ per ogni } a, b, c$$

PROPRIETÀ	ENUNCIATO
Linearità	$\int_a^b (c_1 f + c_2 g) = c_1 \int_a^b f + c_2 \int_a^b g$
Prima monotonia	se $f \geq 0$ in $[a, b]$ allora $\int_a^b f \geq 0$, con uguaglianza se e solo se $f \equiv 0$
Seconda monotonia	se $f \leq g$ in $[a, b]$ allora $\int_a^b f \leq \int_a^b g$
Modulo	$ \int_a^b f \leq \int_a^b f $

DEFINIZIONE

Proprietà della media. Sia f continua in $[a, b]$, con $m = \min f$ e $M = \max f$. Allora $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$ ed esiste $c \in [a, b]$ tale che $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$.

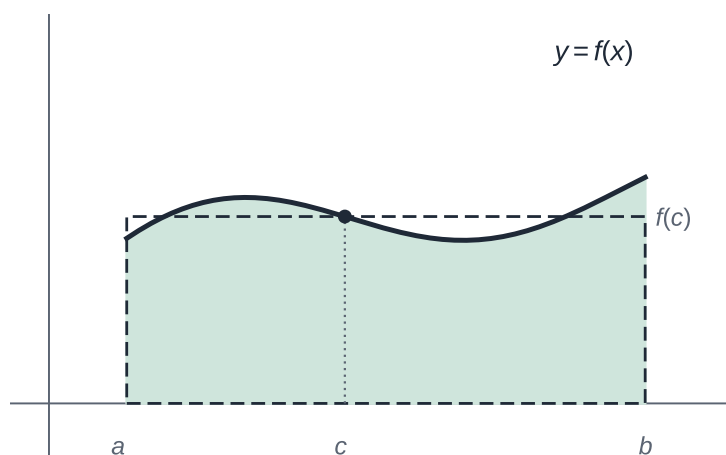


Figura 2. Teorema della media: l'area sotto il grafico coincide con l'area del rettangolo tratteggiato di base $[a, b]$ e altezza $f(c)$.

DIMOSTRAZIONE

La prima disuguaglianza segue dalla definizione: la decomposizione $D = \{a, b\}$ ha un solo intervallo, in cui il minimo è m e il massimo è M . Quindi $s(f, D) = m(b-a)$ e $S(f, D) = M(b-a)$, e l'integrale sta tra i due numeri.

Dividendo per $b-a > 0$ si ottiene

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

Per il teorema di Weierstrass m e M sono valori assunti da f , e per il teorema dei valori intermedi f assume ogni valore compreso tra m e M . Il numero centrale è dunque uguale a $f(c)$ per qualche $c \in [a, b]$.

PRIMA MONOTONIA

Se $f \geq 0$ allora $m \geq 0$, quindi per la proprietà della media $\int_a^b f \geq m(b-a) \geq 0$. La seconda monotonia si ottiene applicando la prima alla funzione $g - f \geq 0$ e usando la linearità. Per il modulo si integra la disuguaglianza $-|f| \leq f \leq |f|$.

DA RICORDARE

In sede d'esame. Il teorema della media è uno dei teoremi con dimostrazione chiesti più spesso nelle prove scritte. Per ricordarlo: si parte dai due estremi m e M , si divide per $b-a$ e si conclude con i valori intermedi.

Funzione integrale e teorema fondamentale

Sia $f: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ continua e $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Per ogni $x \in (\alpha, \beta)$ l'integrale $\int_{x_0}^x f(t) dt$ è un numero che dipende da x . La funzione

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt, \quad x \in (\alpha, \beta),$$

si chiama **funzione integrale** di f di punto iniziale x_0 . Ovviamente $F(x_0) = 0$.

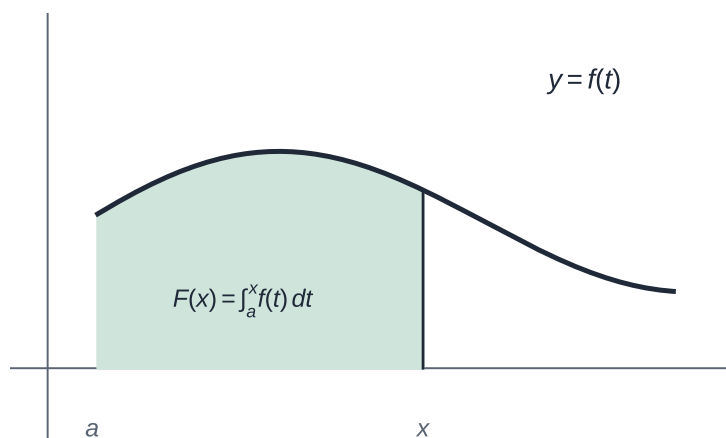


Figura 3. La funzione integrale $F(x)$ misura l'area compresa tra il grafico di f , l'asse x e le rette verticali in a e in x .

DEFINIZIONE

Funzioni integrali con punti iniziali diversi. Se F e G sono le funzioni integrali di f di punti iniziali x_0 e x_1 , esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $F(x) = G(x) + c$ per ogni x .

Dimostrazione. Per l'additività, $F(x) = \int_{x_0}^{x_1} f + \int_{x_1}^x f = \int_{x_0}^{x_1} f + G(x)$. Il primo addendo è un numero indipendente da x .

DEFINIZIONE

Derivata della funzione integrale. Sia $f: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ continua e F una sua funzione integrale. Allora F è derivabile e $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in (\alpha, \beta)$.

DIMOSTRAZIONE

Sia x_0 il punto iniziale e $c \in (\alpha, \beta)$. Per $x \neq c$, usando l'additività si calcola il rapporto incrementale:

$$\frac{F(x) - F(c)}{x - c} = \frac{\int_{x_0}^x f - \int_{x_0}^c f}{x - c} = \frac{1}{x - c} \int_c^x f(t) dt.$$

Supponiamo $x > c$ (l'altro caso è analogo). Per il teorema della media applicato a f in $[c, x]$ esiste $\xi \in [c, x]$ con $(1/(x - c)) \int_c^x f = f(\xi)$. Quando $x \rightarrow c$ anche $\xi \rightarrow c$, perché ξ sta tra c e x . Per la continuità di f in c si ha $f(\xi) \rightarrow f(c)$. Dunque $F'(c) = f(c)$.

DEFINIZIONE

Teorema fondamentale del calcolo integrale. Una funzione continua in un intervallo ha, in quell'intervallo, delle primitive.

Infatti ogni funzione integrale di f è una primitiva di f . Questo spiega perché ogni funzione continua, anche quelle di cui non si sa scrivere una primitiva con le funzioni elementari, ha primitive: ad esempio $\int_0^x e^{-t^2} dt$ è una primitiva di

$$e^{-x^2}.$$

DEFINIZIONE

Formula fondamentale del calcolo integrale. Sia $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ continua e F una sua primitiva. Per ogni $a, b \in (\alpha, \beta)$ si ha $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$.

DIMOSTRAZIONE

La funzione integrale $G(x) = \int_a^x f(t) dt$ è una primitiva di f , quindi per il teorema di caratterizzazione esiste k con $F(x) = G(x) + k$ per ogni x . Per $x = a$, poiché $G(a) = 0$, si ha $F(a) = k$. Allora $F(x) = G(x) + F(a)$ e, per $x = b$, $F(b) = \int_a^b f + F(a)$, cioè la tesi.

ESEMPIO

Calcolo di integrali definiti. Calcolare $\int_1^e \log x dx$ e $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x dx$.

- Una primitiva di $\log x$ è $x(\log x - 1)$ (calcolata per parti nel paragrafo dedicato).

$$\int_1^e \log x dx = [x(\log x - 1)]_1^e$$

- Si calcola la primitiva in e e in 1 e si sottrae.

$$= e(1 - 1) - 1 \cdot (0 - 1) = 0 + 1 = 1$$

- Per $\cos^3 x$ si usa la primitiva trovata con $t = \sin x$: $\cos^3 x = (1 - \sin^2 x) \cos x$, quindi $F(x) = \sin x - \sin^3 x/3$.

$$\int_0^{\pi/2} \cos^3 x dx = \left[\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} \right]_0^{\pi/2}$$

- In $\pi/2$ il seno vale 1, in 0 vale 0.

$$= \left(1 - \frac{1}{3}\right) - 0 = \frac{2}{3}$$

RISULTATO

$$\int_1^e \log x dx = 1 \text{ e } \int_0^{\pi/2} \cos^3 x dx = 2/3.$$

DERIVATA DI UNA FUNZIONE INTEGRALE COMPOSTA

Quando gli estremi di integrazione dipendono da x si usa il teorema di derivazione e la regola di derivazione della funzione composta. Se un estremo è fisso e l'altro è $g(x)$ si ottiene $D[\int_C^{g(x)} f(t) dt] = f(g(x)) g'(x)$. Se l'estremo variabile è quello inferiore, si scambiano gli estremi cambiando segno. Se sono variabili entrambi, si spezza l'integrale in un punto fisso.

ESEMPIO

Derivare funzioni integrali. Sia $f(t) = \sin t / t$ per $t > 0$. Derivare, per $x > 0$, $F_1(x) = \int_x^1 f(t) dt$, $F_2(x) = \int_1^{x^3} f(t) dt$ e $F_3(x) = \int_{x^4}^{\log x} f(t) dt$.

- Per F_1 l'estremo variabile è quello inferiore: si scambiano gli estremi cambiando segno.

$$F_1(x) = -\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt \implies F_1'(x) = -\frac{\sin x}{x}$$

- Per F_2 la funzione integrale $\Phi(y) = \int_1^y f(t) dt$ è composta con $y = x^3$, la cui derivata è $3x^2$.

$$F_2'(x) = f(x^3) \cdot 3x^2 = 3x^2 \frac{\sin x^3}{x^3}$$

- 3 Per F_3 entrambi gli estremi variano: si spezza in un punto fisso, per esempio 2.

$$F_3(x) = \int_{x^4}^2 f(t) dt + \int_2^{\log x} f(t) dt = -\int_2^{x^4} f(t) dt + \int_2^{\log x} f(t) dt$$

- 4 Si deriva ciascun addendo con la regola precedente.

$$F_3'(x) = -f(x^4) \cdot 4x^3 + f(\log x) \cdot \frac{1}{x} = -4x^3 \frac{\sin x^4}{x^4} + \frac{\sin(\log x)}{x \log x}$$

RISULTATO

$F_1' = -\sin x / x$, $F_2' = 3 \sin(x^3)/x$ e $F_3' = -4 \sin(x^4)/x + \sin(\log x)/(x \log x)$.

Interpretazione geometrica e misura di Peano e Jordan

Per attribuire un'area a insiemi del piano che non siano poligoni si usa la teoria della misura di Peano e Jordan, qui solo accennata per insiemi limitati e con punti interni. L'area di un rettangolo $[a, b] \times [c, d]$ è $(b - a)(d - c)$. Un **plurirettangolo** è un'unione finita di rettangoli senza punti interni in comune, e la sua area è la somma delle aree dei rettangoli.

Sia X un insieme limitato con punti interni. Si considerano le famiglie dei plurirettangoli contenuti in X e di quelli che lo contengono, e gli insiemi numerici A (le aree dei primi) e B (le aree dei secondi). Sono separati. Se sono anche contigui, X si dice **misurabile** e il loro elemento di separazione è l'area di X . Altrimenti X è non misurabile.

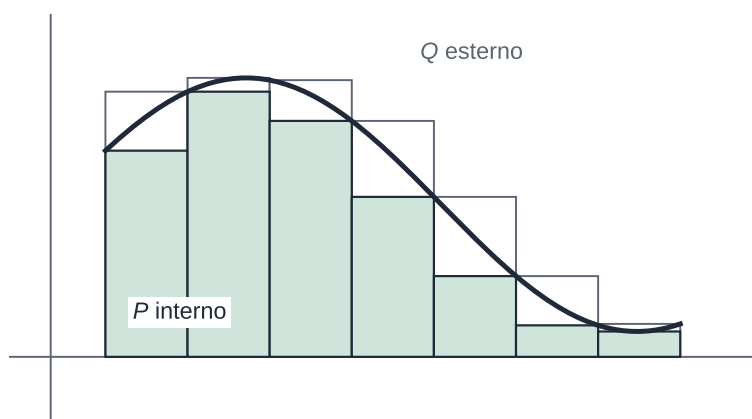


Figura 4. Un plurirettangolo P contenuto nel rettangoloide (chiaro) e un plurirettangolo Q che lo contiene. L'area del rettangoloide è l'elemento di separazione tra le aree dei P e dei Q .

ESEMPIO

Un insieme non misurabile. Sia $X = ([0,1] \times [0,1]) \cap \mathbb{Q}^2 \cup ([0,1] \times [1,2])$. Mostrare che non è misurabile.

- 1 Un plurirettangolo contenuto in X non può avere punti interni nella parte $[0,1]^2 \cap \mathbb{Q}^2$, perché in ogni rettangolo non degenere ci sono punti con coordinate irrazionali, che non stanno in X . Può stare solo in $[0,1] \times [1,2]$, che ha area 1. Quindi $\sup A = 1$.
- 2 Un plurirettangolo che contiene X deve contenere tutti i punti razionali di $[0,1]^2$, che sono densi, e quindi tutto il quadrato $[0,1]^2$, oltre a $[0,1] \times [1,2]$. L'area è almeno 2, quindi $\inf B = 2$.
- 3 I due estremi sono diversi: gli insiemi non sono contigui.

RISULTATO

X non è misurabile.

Sia f continua e non negativa in $[a, b]$. Il **rettangoloide** di f è $R(f) = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$. Per una decomposizione D , il numero $f(y_i)(x_i - x_{i-1})$ è l'area di un rettangolo contenuto nella parte di rettangoloide sopra $[x_{i-1}, x_i]$, quindi $s(f, D)$ è l'area di un plurirettangolo contenuto in $R(f)$ e, in modo analogo, $S(f, D)$ è l'area di un plurirettangolo che lo contiene. La contiguità delle somme inferiori e superiori implica quella degli insiemi A e B : il rettangoloide è misurabile e la sua area è l'integrale.

$$\text{area } R(f) = \int_a^b f(x) dx.$$

Se $f \leq 0$ il rettangoloide è simmetrico, rispetto all'asse delle ascisse, a quello di $-f$, quindi la sua area è $-\int_a^b f$: l'integrale conta come negative le aree sotto l'asse. Se f e g sono continue con $g \leq f$ in $[a, b]$, l'insieme compreso tra i grafici è misurabile e la sua area è $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$.

ESEMPIO

Area compresa tra due grafici. Calcolare l'area della regione compresa tra la parabola $y = x^2$ e la retta $y = 2x$.

- 1 Si trovano le ascisse di intersezione risolvendo $x^2 = 2x$, cioè $x(x - 2) = 0$: $x = 0$ e $x = 2$.
- 2 In $[0, 2]$ la retta sta sopra la parabola (per esempio in $x = 1$: $2 > 1$). L'area è l'integrale della differenza.

$$A = \int_0^2 (2x - x^2) dx$$

- 3 Si integra e si calcola in 2 e in 0.

$$A = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

RISULTATO

L'area vale $4/3$.

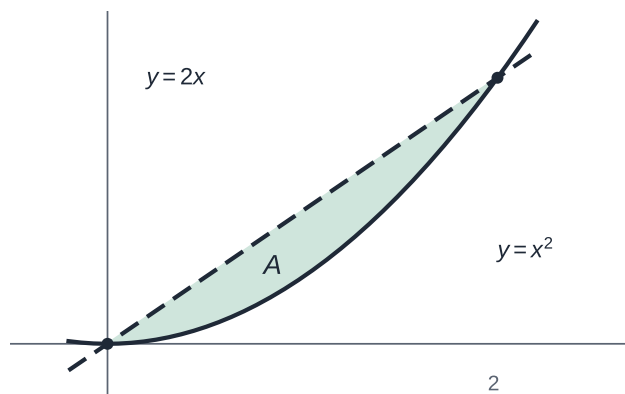


Figura 5. La regione compresa tra la parabola e la retta, di area A .

Equazioni differenziali

Un'equazione differenziale mette in relazione una funzione incognita con le sue derivate.

Si studiano prima le equazioni del primo ordine a variabili separabili e lineari, poi le equazioni lineari di ordine qualsiasi, con particolare attenzione al caso dei coefficienti costanti.

Generalità

DEFINIZIONE

Equazione differenziale in forma normale. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ e $F: A \rightarrow \mathbb{R}$. Si chiama equazione differenziale di ordine n in forma normale $y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ il problema di determinare le funzioni $y: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ (le soluzioni o integrali) tali che: (1) y è derivabile n volte in (α, β) ; (2) $(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \in A$ per ogni x ; (3) l'equazione è verificata in ogni punto di (α, β) .

L'insieme di tutte le soluzioni è l'**integrale generale**; una singola soluzione è un **integrale particolare**. Per esempio $y' - 3xy = y^2$ è del primo ordine e in forma normale è $y' = 3xy + y^2$, con $F(x, y) = 3xy + y^2$. L'equazione $y'' = 3xy' + e^{\sqrt{y}}$ è del secondo ordine ed esige $y \geq 0$ in ogni punto.

ESEMPIO

Verificare se una funzione è soluzione. La funzione $y(x) = x \sin x$ è una soluzione di $y' - 3xy = y^2$?

1

Si calcola la derivata.

$$y'(x) = \sin x + x \cos x$$

2

Si calcola il primo membro dell'equazione.

$$y' - 3xy = \sin x + x \cos x - 3x^2 \sin x$$

3

Si calcola il secondo membro.

$$y^2 = x^2 \sin^2 x$$

4

Per $x = \pi/2$ il primo membro vale $1 - 3\pi^2/4 \approx -6,4$ e il secondo vale $\pi^2/4 \approx 2,5$; i due numeri sono diversi.

$$\sin \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} - 3 \frac{\pi^2}{4} \sin \frac{\pi}{2} = 1 - \frac{3\pi^2}{4} \neq \frac{\pi^2}{4}$$

RISULTATO

Non è una soluzione: l'uguaglianza non vale per ogni x .

DEFINIZIONE

Problema di Cauchy. Dato un punto $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}) \in A$, il problema di Cauchy associato all'equazione di ordine n è il problema di trovare una soluzione y che verifichi le condizioni iniziali $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Per il primo ordine, il problema di Cauchy chiede una soluzione che in un punto assegnato assuma un valore assegnato. Sotto opportune ipotesi esiste una e una sola soluzione, come si vedrà per le equazioni lineari.

Non esiste un metodo per tutte le equazioni. Si studiano alcune classi in cui il metodo risolutivo è noto: le equazioni del primo ordine a variabili separabili, quelle lineari del primo ordine e quelle lineari di ordine n .

DEFINIZIONE

Equazione lineare. L'equazione del primo ordine $y' = a(x)y + g(x)$ è detta lineare. L'equazione del secondo ordine $y'' = a(x)y' + b(x)y + g(x)$ è detta lineare. In generale si è lineari quando F è una combinazione lineare di $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ con coefficienti che dipendono solo da x .

ESEMPIO

Riconoscere le equazioni lineari. Dire quali tra $y'' - 3xy = e^x$, $y' = y^2 \arctan x + e^x$, $y' - y \arctan x = y\sqrt{x}$ e $y'' - 3x\sqrt{y'} + 5e^y = 0$ sono lineari.

- 1 La prima si scrive $y'' = 3xy + e^x$: è lineare del secondo ordine, con coefficiente di y uguale a $3x$ e coefficiente di y' nullo.
- 2 La seconda contiene y^2 , che non è lineare in y : non è lineare.
- 3 La terza si scrive $y' = y(\arctan x + \sqrt{x})$: è lineare del primo ordine, con $a(x) = \arctan x + \sqrt{x}$ e $g = 0$. È anche a variabili separabili.
- 4 La quarta contiene $\sqrt{y'}$ ed e^y : non è lineare.

RISULTATO

Sono lineari la prima e la terza.

Equazioni a variabili separabili

DEFINIZIONE

Equazione a variabili separabili. Siano $X : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e $Y : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ continue. L'equazione $y' = X(x)Y(y)$ è detta a variabili separabili. Una soluzione è una funzione $y : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile con $(\alpha, \beta) \subseteq (a, b)$, con $y(x) \in (c, d)$ per ogni x e con $y'(x) = X(x)Y(y(x))$ per ogni $x \in (\alpha, \beta)$.

Il punto è che il secondo membro è il prodotto di una funzione della sola x per una della sola y . Per esempio $y' = x^2 y^2$ è a variabili separabili con $X(x) = x^2$ e $Y(y) = y^2$, come $y' = (\cos x)(\cos y)$. Non lo sono $y' = \log(xy)$, perché x e y non si separano in un prodotto, né $y' = (y + xy)/(1 + xy)$. Invece $y' = (y + xy)e^{x+y} = (y/e^y)((1 + x)/e^x)$ lo è. Una equazione di ordine superiore al primo non è a variabili separabili.

SOLUZIONI DI PRIMA CATEGORIA (COSTANTI)

Sia $H = \{h \in (c, d) : Y(h) = 0\}$. Se $h \in H$ la funzione costante $y(x) = h$ per ogni $x \in (a, b)$ è una soluzione: la derivata è 0 e anche il secondo membro vale $X(x)Y(h) = 0$. Sono le soluzioni di prima categoria.

SOLUZIONI DI SECONDA CATEGORIA

Sono le soluzioni $y : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ per cui $Y(y(x)) \neq 0$ per ogni $x \in (\alpha, \beta)$. Per ricavarle si divide l'equazione per $Y(y(x))$:

$$\frac{y'(x)}{Y(y(x))} = X(x) \quad \forall x \in (\alpha, \beta).$$

Poiché X è continua ha una primitiva $A(x)$. L'immagine di y è un intervallo (σ, ρ) (la funzione è continua) in cui Y non si annulla mai, quindi $1/Y$ è continua in (σ, ρ) e ha una primitiva $B(y)$. Per la derivata della funzione composta $D[B(y(x))] = B'(y(x))y'(x) = y'(x)/Y(y(x))$. L'equazione dice dunque che $B(y(x))$ e $A(x)$ hanno la stessa derivata,

quindi

$$B(y(x)) = A(x) + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

La funzione Y ha segno costante in (σ, ρ) perché è continua e non si annulla, quindi $B' = 1/Y$ ha segno costante e B è strettamente monotona, quindi invertibile. Allora $y(x) = B^{-1}(A(x) + k)$. Viceversa, queste funzioni sono soluzioni nei sottointervalli in cui $A(x) + k$ appartiene al dominio di B^{-1} .

DA RICORDARE

Metodo. In pratica. Per $y' = X(x) Y(y)$ si scrivono le costanti $y = h$ con $Y(h) = 0$. Poi, dove $Y \neq 0$, si calcolano $\int X(x) dx$ e $\int dy/Y(y)$, si impone l'uguaglianza con una costante k e si ricava y in funzione di x . Una scrittura rapida (non rigorosa ma comoda) è $dy/Y(y) = X(x) dx$.

SOLUZIONI DI TERZA CATEGORIA

Sono soluzioni per cui esistono $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ con $Y(y(x_1)) = 0$ e $Y(y(x_2)) \neq 0$: la soluzione tocca una costante e poi se ne allontana. Per Y derivabile non esistono (due soluzioni distinte non possono toccarsi), ma se Y è solo continua possono esistere, come nell'ultimo esempio di questo paragrafo.

ESEMPIO

L'equazione $y' = y^2$. Risolvere $y' = y^2$ e trovare la soluzione con $y(0) = 1$.

1 L'equazione è a variabili separabili con $X(x) = 1$ su $\mathbb{R}$ e $Y(y) = y^2$ su $\mathbb{R}$.

2 Prima categoria: $Y(h) = h^2 = 0$ solo per $h = 0$. Soluzione: $y(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

3 Seconda categoria: si cercano soluzioni con $y(x) \neq 0$. Si divide per y^2 .

$$\frac{y'(x)}{y(x)^2} = 1$$

4 Si osserva che il primo membro è la derivata di $-1/y(x)$ e il secondo è la derivata di x .

$$D\left[-\frac{1}{y(x)}\right] = D[x] \implies -\frac{1}{y(x)} = x + k$$

5 Si ricava y , per $x \neq -k$.

$$y(x) = -\frac{1}{x+k}$$

6 L'intervallo di definizione non può contenere $-k$: la soluzione è definita in $]-\infty, -k[$ oppure in $]-k, +\infty[$.

7 Condizione iniziale $y(0) = 1$: $-1/k = 1$, quindi $k = -1$. La soluzione è definita in $]-\infty, 1[$ perché 0 appartiene a quell'intervallo.

$$y(x) = -\frac{1}{x-1} = \frac{1}{1-x}, \quad x < 1$$

RISULTATO

L'integrale generale è $y = 0$ e $y = -1/(x + k)$ in $]-\infty, -k[$ oppure in $]-k, +\infty[$. Il problema di Cauchy ha soluzione $y = 1/(1 - x)$ in $]-\infty, 1[$, che non è prolungabile oltre $x = 1$ (esplode).

ESEMPIO

Un problema di Cauchy con x^2 . Risolvere $y' = x^2 y^2$ con $y(1) = 3$.

1 Prima categoria: $Y(y) = y^2$ si annulla in 0, quindi $y = 0$ è una soluzione. Non soddisfa la condizione iniziale ($y(1) = 3 \neq 0$).

- 2 Seconda categoria: si divide per y^2 e si integrano i due membri rispetto a x .

$$\frac{y'}{y^2} = x^2 \implies -\frac{1}{y} = \frac{x^3}{3} + k$$

- 3 Si ricava y ponendo $c = -3k$.

$$y(x) = -\frac{3}{x^3 + 3k} = \frac{3}{c - x^3}$$

- 4 Condizione $y(1) = 3$: $3/(c - 1) = 3$, quindi $c - 1 = 1$, cioè $c = 2$.

$$y(x) = \frac{3}{2 - x^3}$$

- 5 Il denominatore si annulla per $x = \sqrt[3]{2}$. L'intervallo contenente il punto iniziale $x = 1$ è $]-\infty, \sqrt[3]{2}[$: la soluzione vive lì.

RISULTATO

$y(x) = 3/(2 - x^3)$ per $x < \sqrt[3]{2}$.

ESEMPIO

Soluzioni di terza categoria. Studiare le soluzioni di $y' = 3y^{2/3}$.

- 1 L'equazione è a variabili separabili con $X = 1$ e $Y(y) = 3y^{2/3}$, continua in $\mathbb{R}$ ma non derivabile in 0.

- 2 Prima categoria: $Y(h) = 0$ solo per $h = 0$. Soluzione: $y = 0$.

- 3 Seconda categoria: si divide per $y^{2/3}$.

$$\frac{y'}{3y^{2/3}} = 1 \implies D[y^{1/3}] = D[x] \implies y^{1/3} = x + k$$

- 4 Si eleva al cubo.

$$y(x) = (x - c)^3, \quad c \in \mathbb{R}$$

- 5 Terza categoria: si incolla lo zero con una di queste funzioni. Per c fissato si pone $y = 0$ per $x < c$ e $y = (x - c)^3$ per $x \geq c$. La funzione è derivabile in c perché la derivata di $(x - c)^3$ in c vale 0.

- 6 Per il punto $(0, 0)$ passano dunque infinite soluzioni (ad esempio $y = 0$, $y = x^3$ e le funzioni incollate): l'unicità del problema di Cauchy cade perché Y non è derivabile in 0.

RISULTATO

Il problema di Cauchy con $y(0) = 0$ ha infinite soluzioni.

Equazioni lineari del primo ordine

Siano a, f funzioni continue in un intervallo (α, β) . L'equazione

$$y' + a(x)y = f(x)$$

si dice lineare del primo ordine. Se $f \equiv 0$ è **omogenea**. Alla completa si associa l'**omogenea associata** $y' = -a(x)y$. Si può provare che, per a e f continue, le soluzioni sono definite in tutto (α, β) .

EQUAZIONE OMOGENEA

La funzione nulla è soluzione. Sia ora y una soluzione che non si annulla mai: essendo continua ha segno costante, e

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -a(x).$$

Il primo membro è la derivata di $\log|y(x)|$. Se A è una primitiva di a , le funzioni $\log|y(x)|$ e $-A(x)$ hanno la stessa derivata e differiscono per una costante: $\log|y(x)| = -A(x) + c$, da cui

$$y(x) = k e^{-A(x)}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Con $k = 0$ si ritrova la funzione nulla, con $k > 0$ soluzioni positive e con $k < 0$ negative. Non esistono soluzioni che si annullano in un punto senza annullarsi dappertutto, perché $k e^{-A(x)}$ non tende mai a zero per x finito. Quindi la formula dà tutte e sole le soluzioni dell'omogenea.

EQUAZIONE COMPLETA: VARIAZIONE DELLA COSTANTE

Si cerca una soluzione particolare della forma $\bar{y}(x) = k(x) e^{-A(x)}$, dove la costante k è sostituita da una funzione derivabile. Derivando e sostituendo (con $A' = a$):

$$k'(x) e^{-A(x)} - A'(x) k(x) e^{-A(x)} + a(x) k(x) e^{-A(x)} = f(x).$$

I due termini con $k(x)$ si cancellano, e rimane $k'(x) e^{-A(x)} = f(x)$, cioè

$$k'(x) = f(x) e^{A(x)}.$$

La funzione k è una primitiva di $f(x) e^{A(x)}$, che esiste perché è continua. Si è così trovato un integrale particolare $\bar{y}$.

DEFINIZIONE

Struttura delle soluzioni. Se y risolve l'equazione completa e z l'omogenea associata, $y + z$ risolve la completa. Se y e z risolvono la completa, $y - z$ risolve l'omogenea.

Dimostrazione. Se $w = y + z$ allora $w' + a w = (y' + a y) + (z' + a z) = f + 0 = f$. Se $w = y - z$, allora $w' + a w = (y' + a y) - (z' + a z) = f - f = 0$.

DA RICORDARE

Formula risolutiva. L'integrale generale di $y' + a(x) y = f(x)$ è $y(x) = \bar{y}(x) + k e^{-A(x)}$, con $k \in \mathbb{R}$, dove A è una primitiva di a e $\bar{y} = k(x) e^{-A(x)}$ con $k(x)$ primitiva di $f(x) e^{A(x)}$. Una volta fissati A e $k(x)$ la formula si legge come $y = e^{-A(x)} [\int f(x) e^{A(x)} dx]$, con una costante arbitraria nell'integrale.

ESEMPIO

Un'equazione completa. Risolvere $y' + y = x$.

1 Qui $a(x) = 1$, quindi $A(x) = x$ e l'omogenea associata ha soluzioni $k e^{-x}$.

2 Si cerca $\bar{y} = k(x) e^{-x}$ con $k'(x) = f(x) e^{A(x)} = x e^x$.

$$k'(x) = x e^x$$

3 Per parti, con fattore finito x e differenziale e^x .

$$k(x) = \int x e^x dx = x e^x - e^x = (x - 1) e^x$$

4 Si calcola $\bar{y}$.

$$\bar{y}(x) = (x - 1) e^x e^{-x} = x - 1$$

5 Si aggiunge l'integrale generale dell'omogenea.

$$y(x) = x - 1 + k e^{-x}, \quad k \in \mathbb{R}$$

6

Verifica: $y' = 1 - k e^{-x}$, quindi $y' + y = 1 - k e^{-x} + x - 1 + k e^{-x} = x$.

RISULTATO

$y(x) = x - 1 + k e^{-x}$, per $x \in \mathbb{R}$.

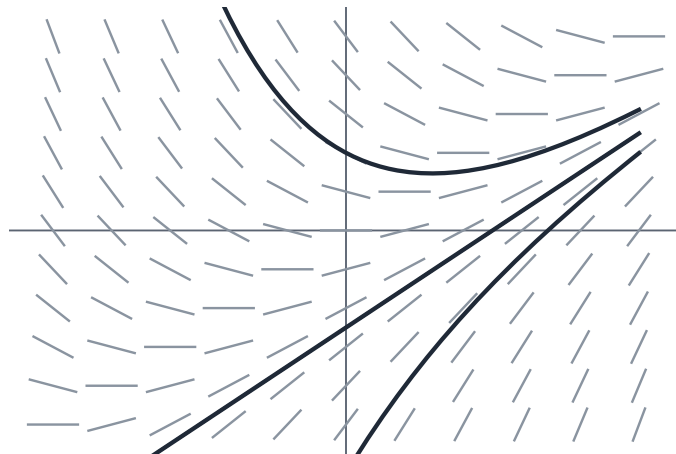


Figura 1. Il campo delle direzioni di $y' = x - y$ con alcune soluzioni $y = x - 1 + k e^{-x}$. La retta tratteggiata $y = x - 1$ corrisponde a $k = 0$.

ESEMPIO

Un problema di Cauchy lineare. Risolvere $y' + (2/x)y = x$ per $x > 0$, con $y(1) = 0$.

1

Qui $a(x) = 2/x$, quindi $A(x) = 2 \log x = \log x^2$ e $e^{A(x)} = x^2$, $e^{-A(x)} = 1/x^2$.

2

Si calcola $k'(x) = f(x) e^{A(x)} = x \cdot x^2$ e quindi k .

$$k'(x) = x^3 \implies k(x) = \frac{x^4}{4}$$

3

Soluzione particolare.

$$\bar{y}(x) = \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{x^2}{4}$$

4

Integrale generale.

$$y(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{k}{x^2}$$

5

Condizione $y(1) = 0$: $1/4 + k = 0$, quindi $k = -1/4$.

$$y(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4x^2} = \frac{x^4 - 1}{4x^2}$$

RISULTATO

$y(x) = (x^4 - 1)/(4x^2)$ per $x > 0$.

Equazioni lineari di ordine n

Siano $a_1, \dots, a_n, f$ funzioni continue in uno stesso intervallo (α, β) . L'equazione

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

si dice lineare di ordine n ; le a_i sono i coefficienti, f è il termine noto. Se $f \equiv 0$ è omogenea. L'**omogenea associata** (O) ha gli stessi coefficienti e termine noto nullo.

DEFINIZIONE

Esistenza e unicità. Il problema di Cauchy associato a (C) ha una e una sola soluzione, definita in tutto (α, β) . (Enunciato senza dimostrazione.)

DEFINIZIONE

Proprietà delle soluzioni. (1) Se y risolve (C) e z risolve (O), $y + z$ risolve (C). (2) Se y e z risolvono (C), $y - z$ risolve (O). (3) Se y e z risolvono (O), ogni combinazione lineare $h y + k z$ risolve (O). (4) Principio di sovrapposizione: se y risolve (C) con termine noto f e z risolve (C) con termine noto g , allora $c_1 y + c_2 z$ risolve (C) con termine noto $c_1 f + c_2 g$. (5) Se il termine noto è complesso, $f = u + iv$, la funzione $y = w + iz$ risolve (C) se e solo se w risolve (C) con termine noto u e z risolve (C) con termine noto v .

Si dimostrano usando la linearità della derivata, come per $n = 1$. Per la (4): $D^n(c_1 y + c_2 z) + \dots = c_1 (y^{(n)} + \dots) + c_2 (z^{(n)} + \dots) = c_1 f + c_2 g$. Per la (5) si separano parte reale e parte immaginaria, poiché i coefficienti sono reali. Dalla (3) segue che le soluzioni di (O), con somma e prodotto per un numero, formano uno spazio vettoriale.

WRONSKIANO E SOLUZIONI INDIPENDENTI

Siano $y_1, \dots, y_n$ soluzioni di (O). Il loro **wronskiano** è il determinante

$$W(x) = \det \left[y_j^{(i-1)}(x) \right]_{i,j=1, \dots, n}$$

La matrice ha n colonne, una per ogni soluzione y_j , e n righe: la prima contiene le soluzioni, la seconda le loro derivate prime, e così via fino alla riga n con le derivate di ordine $n - 1$. Per $n = 2$ si ha $W = y_1 y_2' - y_2 y_1'$.

DEFINIZIONE

Wronskiano di soluzioni di (O). Si verifica una e una sola delle due situazioni: o $W(x) = 0$ per ogni $x \in (\alpha, \beta)$, oppure $W(x) \neq 0$ per ogni $x \in (\alpha, \beta)$.

Traccia della dimostrazione, per $n = 2$. Qui $W = y_1 y_2' - y_2 y_1'$. Derivando:

$$W' = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_2' y_1' - y_2 y_1'' = y_1 y_2'' - y_2 y_1''.$$

Poiché $y_i'' = -a_1 y_i' - a_2 y_i$ (sono soluzioni di (O)), si ha

$$W' = y_1(-a_1 y_2' - a_2 y_2) - y_2(-a_1 y_1' - a_2 y_1) = -a_1(y_1 y_2' - y_2 y_1') = -a_1(x) W.$$

Dunque W risolve l'equazione lineare omogenea del primo ordine $W' + a_1(x) W = 0$, le cui soluzioni sono $k e^{-A_1(x)}$, con A_1 primitiva di a_1 : o nulle (per $k = 0$) o sempre diverse da zero. In generale vale $W' = -a_1 W$ per ogni n (formula di Abel, che per coefficienti costanti dà $W(x) = W(x_0) e^{-a_1(x-x_0)}$).

DEFINIZIONE

Soluzioni indipendenti. Le soluzioni $y_1, \dots, y_n$ di (O) sono dette indipendenti se $W(x) \neq 0$ per ogni $x \in (\alpha, \beta)$.

DEFINIZIONE

Esistenza di n soluzioni indipendenti. Un'equazione lineare omogenea di ordine n ha sempre n soluzioni indipendenti.

DIMOSTRAZIONE

Si fissa $x_0 \in (\alpha, \beta)$ e si considerano gli n problemi di Cauchy (P_i) , con $i = 1, \dots, n$: l'equazione (O) con le condizioni $y^{(i-1)}(x_0) = 1$ e $y^{(j)}(x_0) = 0$ per $j \neq i - 1$. Per il teorema di esistenza e unicità ciascuno ha una soluzione y_i . Il wronskiano in x_0 è il determinante della matrice identità, cioè $W(x_0) = 1 \neq 0$. Per la proposizione sul wronskiano, $W(x) \neq 0$ ovunque: le y_i sono indipendenti.

DEFINIZIONE

Integrale generale di (O). Se $y_1, \dots, y_n$ sono soluzioni indipendenti di (O), tutte e sole le soluzioni di (O) sono $k_1 y_1 + \dots + k_n y_n$, con $k_i \in \mathbb{R}$.

DIMOSTRAZIONE

Una combinazione lineare di soluzioni è una soluzione (proprietà 3). Viceversa, sia $\bar{y}$ una soluzione di (O). Si fissa x_0 e si considera il problema di Cauchy con condizioni $y^{(j)}(x_0) = \bar{y}^{(j)}(x_0)$ per $j = 0, \dots, n - 1$, di cui $\bar{y}$ è soluzione. Si considera poi il sistema lineare di n equazioni nelle incognite $k_1, \dots, k_n$:

$$\sum_{i=1}^n k_i y_i^{(j)}(x_0) = \bar{y}^{(j)}(x_0), \quad j = 0, 1, \dots, n - 1.$$

La matrice dei coefficienti ha determinante $W(x_0) \neq 0$, quindi il sistema ha un'unica soluzione $(k_1, \dots, k_n)$. La funzione $w = \sum k_i y_i$ risolve (O) e ha le stesse condizioni iniziali di $\bar{y}$ in x_0 : per l'unicità $\bar{y} = w$.

Le soluzioni indipendenti nel senso del wronskiano sono anche linearmente indipendenti (l'unica combinazione nulla è quella con tutti i coefficienti nulli); ne segue che lo spazio delle soluzioni di (O) ha dimensione n .

DEFINIZIONE

Integrale generale di (C). Se $y_1, \dots, y_n$ sono soluzioni indipendenti di (O) e $\bar{y}$ è una soluzione di (C), l'integrale generale di (C) è $\bar{y}(x) + k_1 y_1(x) + \dots + k_n y_n(x)$, $k_i \in \mathbb{R}$.

La tesi segue dal teorema precedente e dalle proprietà (1) e (2): la differenza di una soluzione qualsiasi di (C) con $\bar{y}$ è soluzione di (O).

DA RICORDARE

In sede d'esame. Per risolvere un'equazione lineare completa serve sempre: (a) l'integrale generale dell'omogenea associata, che richiede n soluzioni indipendenti; (b) un integrale particolare della completa; (c) la somma dei due. Nell'esame si chiede spesso di motivare perché y_1 e y_2 sono indipendenti: si calcola il wronskiano e si mostra che non si annulla.

Equazioni omogenee a coefficienti costanti

Si considera ora l'equazione a coefficienti costanti

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0.$$

Si cercano soluzioni del tipo $y(x) = e^{\alpha x}$, con $\alpha \in \mathbb{C}$. Poiché $D^k e^{\alpha x} = \alpha^k e^{\alpha x}$, sostituendo si ottiene $e^{\alpha x} (\alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + a_n) = 0$. La funzione è dunque soluzione se e solo se α risolve l'**equazione caratteristica**

$$\alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + a_{n-1} \alpha + a_n = 0.$$

Le soluzioni di questa equazione (reali e complesse coniugate a coppie) forniscono n soluzioni indipendenti (non lo si dimostra):

RADICE DELLA CARATTERISTICA

SOLUZIONI INDIPENDENTI DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE

α reale di molteplicità r

$e^{\alpha x}, x e^{\alpha x}, \dots, x^{r-1} e^{\alpha x}$ (r funzioni)

$\beta \pm i\gamma$ complesse coniugate di molteplicità s

$x^j e^{\beta x} \cos(\gamma x)$ e $x^j e^{\beta x} \sin(\gamma x)$, con $j = 0, \dots, s-1$ ($2s$ funzioni)

Nel caso $n = 2$ l'equazione è $y'' + a y' + b y = 0$ con $a, b \in \mathbb{R}$ e l'equazione caratteristica è $\alpha^2 + a \alpha + b = 0$. Si studia il segno di $\Delta = a^2 - 4b$.

CASO	RADICI	INTEGRALE GENERALE	WRONSKIANO
$\Delta > 0$	$\alpha_1 \neq \alpha_2$ reali	$k_1 e^{\alpha_1 x} + k_2 e^{\alpha_2 x}$	$(\alpha_2 - \alpha_1) e^{(\alpha_1 + \alpha_2)x} \neq 0$
$\Delta = 0$	α reale doppia	$k_1 e^{\alpha x} + k_2 x e^{\alpha x}$	$e^{2\alpha x} \neq 0$
$\Delta < 0$	$\beta \pm i\gamma, \gamma \neq 0$	$e^{\beta x}(k_1 \cos \gamma x + k_2 \sin \gamma x)$	$\gamma e^{2\beta x} \neq 0$

I wronskiani si calcolano a mano. Nel caso $\Delta > 0$, per $y_1 = e^{\alpha_1 x}$ e $y_2 = e^{\alpha_2 x}$:

$$W = y_1 y_2' - y_2 y_1' = e^{\alpha_1 x} \cdot \alpha_2 e^{\alpha_2 x} - e^{\alpha_2 x} \cdot \alpha_1 e^{\alpha_1 x} = (\alpha_2 - \alpha_1) e^{(\alpha_1 + \alpha_2)x}.$$

Nel caso $\Delta = 0$, per $y_1 = e^{\alpha x}$ e $y_2 = x e^{\alpha x}$ (con $y_2' = e^{\alpha x} + \alpha x e^{\alpha x}$):

$$W = e^{\alpha x}(e^{\alpha x} + \alpha x e^{\alpha x}) - x e^{\alpha x} \cdot \alpha e^{\alpha x} = e^{2\alpha x}.$$

Nel caso $\Delta < 0$, per $y_1 = e^{\beta x} \cos \gamma x$ e $y_2 = e^{\beta x} \sin \gamma x$:

$$W = e^{\beta x} \cos \gamma x \cdot e^{\beta x} (\beta \sin \gamma x + \gamma \cos \gamma x) - e^{\beta x} \sin \gamma x \cdot e^{\beta x} (\beta \cos \gamma x - \gamma \sin \gamma x) = \gamma e^{2\beta x}.$$

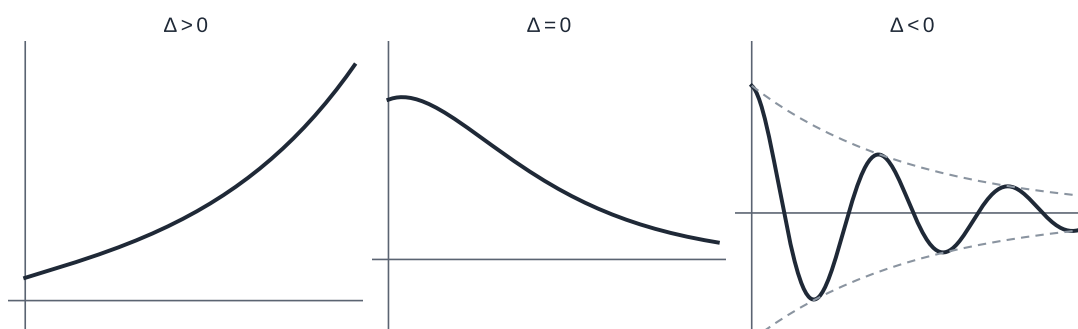


Figura 2. Andamento qualitativo delle soluzioni di $y'' + a y' + b y = 0$ nei tre casi: esponenziali ($\Delta > 0$), esponenziale per un polinomio ($\Delta = 0$), oscillazione smorzata ($\Delta < 0$, le curve tratteggiate sono $\pm e^{\beta x}$).

ESEMPIO

Tre equazioni omogenee. Risolvere $y'' + 2y' - 3y = 0$, $y'' - 4y' + 4y = 0$ e $y'' + 2y' + 3y = 0$.

- 1 Prima equazione. Caratteristica $\alpha^2 + 2\alpha - 3 = 0$, discriminante $4 + 12 = 16 > 0$. Le radici sono $\alpha = (-2 \pm 4)/2$, cioè $\alpha = 1$ e $\alpha = -3$.

$$y(x) = k_1 e^x + k_2 e^{-3x}$$

- 2 Seconda equazione. Caratteristica $\alpha^2 - 4\alpha + 4 = (\alpha - 2)^2 = 0$: radice doppia $\alpha = 2$.

$$y(x) = k_1 e^{2x} + k_2 x e^{2x}$$

3

Terza equazione. Caratteristica $\alpha^2 + 2\alpha + 3 = 0$, discriminante $4 - 12 = -8 < 0$. Le radici sono $\alpha = (-2 \pm 2i\sqrt{2})/2 = -1 \pm i\sqrt{2}$: $\beta = -1$ e $\gamma = \sqrt{2}$.

$$y(x) = e^{-x}(k_1 \cos \sqrt{2} x + k_2 \sin \sqrt{2} x)$$

RISULTATO

Si ottengono rispettivamente $k_1 e^x + k_2 e^{-3x}$, $(k_1 + k_2 x) e^{2x}$ ed $e^{-x}(k_1 \cos \sqrt{2} x + k_2 \sin \sqrt{2} x)$.

ESEMPIO

Una radice complessa doppia. Risolvere $y'''' + 2y'' + y = 0$.

1

Caratteristica: $\alpha^4 + 2\alpha^2 + 1 = (\alpha^2 + 1)^2 = 0$. Le radici sono $\pm i$, ciascuna con molteplicità 2: $\beta = 0$, $\gamma = 1$, $s = 2$.

2

Per $s = 2$ si hanno 4 soluzioni: $\cos x$, $x \cos x$, $\sin x$, $x \sin x$.

$$y(x) = (k_1 + k_2 x) \cos x + (k_3 + k_4 x) \sin x$$

RISULTATO

$y(x) = (k_1 + k_2 x) \cos x + (k_3 + k_4 x) \sin x$.

Equazioni complete: il metodo di somiglianza

Per trovare un integrale particolare della completa a coefficienti costanti si sfrutta il fatto che, quando il termine noto è del tipo

$$f(x) = e^{hx} p(x), \quad h \in \mathbb{C}, \quad p \text{ polinomio di grado } m,$$

esiste una soluzione di forma simile. Precisamente si cerca

$$\bar{y}(x) = e^{hx} x^s q(x),$$

dove q è un polinomio di grado m a coefficienti da determinare e s è la molteplicità di h come radice dell'equazione caratteristica ($s = 0$ se h non è radice). I coefficienti di q si trovano sostituendo $\bar{y}$ nell'equazione e uguagliando i coefficienti dei polinomi.

DA RICORDARE

Termini noti trigonometrici. Caso con cos o sin. Se $f(x) = p(x) \cos(\gamma x)$ si considera l'equazione con termine noto $p(x) e^{i\gamma x}$, se ne trova una soluzione complessa $\bar{y}$ e si prende la parte reale. Se $f(x) = p(x) \sin(\gamma x)$ si prende la parte immaginaria. Questo è consentito dalla proprietà (5), perché i coefficienti sono reali. Se f contiene anche $e^{\beta x}$, si usa $h = \beta + i\gamma$.

ESEMPIO

Il caso h radice semplice. Risolvere $y'' - y' = x^2 e^x$.

1

Omogenea associata: $\alpha^2 - \alpha = \alpha(\alpha - 1) = 0$, radici 0 e 1.

$$y_0(x) = k_1 e^x + k_2$$

2

Termine noto $e^{hx} p(x)$ con $h = 1$ e $p(x) = x^2$ ($m = 2$). Poiché 1 è radice semplice, $s = 1$. Si cerca $\bar{y} = x(ax^2 + bx + c) e^x$.

$$\bar{y}(x) = (ax^3 + bx^2 + cx)e^x$$

- 3 Si calcolano le derivate. Per la derivata del prodotto, $D[P e^x] = (P' + P) e^x$, dove P è il polinomio.

$$\bar{y}' = (ax^3 + (3a + b)x^2 + (2b + c)x + c)e^x$$

- 4 Si deriva ancora.

$$\bar{y}'' = (ax^3 + (6a + b)x^2 + (6a + 4b + c)x + 2b + 2c)e^x$$

- 5 Si calcola $\bar{y}'' - \bar{y}'$.

$$\bar{y}'' - \bar{y}' = (3ax^2 + (6a + 2b)x + 2b + c)e^x$$

- 6 Si uguaglia a $x^2 e^x$: coefficienti di x^2 , x e del termine noto.

$$3a = 1, \quad 6a + 2b = 0, \quad 2b + c = 0$$

- 7 Risolvendo: $a = 1/3$, poi $2b = -6a = -2$, quindi $b = -1$, poi $c = -2b = 2$.

$$a = \frac{1}{3}, \quad b = -1, \quad c = 2$$

RISULTATO

$$y(x) = k_1 e^x + k_2 + (x^3/3 - x^2 + 2x) e^x.$$

Attenzione: in questo esempio l'esponenziale e^x moltiplica anche il polinomio particolare. Se f è $x^2 e^x$ la soluzione particolare è $(x^3/3 - x^2 + 2x) e^x$, non $x^3/3 - x^2 + 2x$.

ESEMPIO

Il caso h non radice. Risolvere $y'' - y' = e^{2x}$.

- 1 Omogenea come prima: $k_1 e^x + k_2$.

- 2 Il termine noto è e^{2x} : $h = 2$, $m = 0$. Poiché 2 non è radice, $s = 0$ e si cerca $\bar{y} = c e^{2x}$.

$$\bar{y}' = 2c e^{2x}, \quad \bar{y}'' = 4c e^{2x}$$

- 3 Sostituendo, $4c e^{2x} - 2c e^{2x} = e^{2x}$, cioè $2c = 1$.

$$c = \frac{1}{2}$$

RISULTATO

$$y(x) = k_1 e^x + k_2 + e^{2x}/2.$$

ESEMPIO

Il caso $h = 0$ radice. Risolvere $y'' - y' = 2x + 1$.

- 1 Omogenea: $k_1 e^x + k_2$.

- 2 Termine noto $e^{0 \cdot x} (2x + 1)$: $h = 0$, $m = 1$. Poiché 0 è radice semplice, $s = 1$ e si cerca $\bar{y} = x(ax + b) = ax^2 + bx$.

$$\bar{y}' = 2ax + b, \quad \bar{y}'' = 2a$$

- 3 Sostituendo.

$$\bar{y}'' - \bar{y}' = 2a - 2ax - b = 2x + 1$$

- 4 Si uguagliano i coefficienti: $-2a = 2$ e $2a - b = 1$.

$$a = -1, \quad b = 2a - 1 = -3$$

RISULTATO

$$y(x) = k_1 e^x + k_2 - x^2 - 3x.$$

ESEMPIO

Termine noto con coseno. Risolvere $y'' + y = 2x \cos x$.

- 1 Omogenea: $\alpha^2 + 1 = 0$, radici $\pm i$.

$$y_0(x) = k_1 \cos x + k_2 \sin x$$

- 2 Poiché $\cos x$ è la parte reale di e^{ix} , si considera $y'' + y = 2x e^{ix}$ e si prende la parte reale della soluzione.

- 3 Termine noto con $h = i$, $m = 1$. Poiché i è radice semplice della caratteristica, $s = 1$: si cerca $\bar{y} = x(a x + b) e^{ix}$.

$$\bar{y} = (ax^2 + bx)e^{ix}$$

- 4 Si deriva, ricordando $D[P e^{ix}] = (P' + i P) e^{ix}$.

$$\bar{y}' = (2ax + b + i ax^2 + i bx)e^{ix}$$

- 5 Seconda derivata.

$$\bar{y}'' = (2a + 2i ax + i b + 2i ax + i b - ax^2 - bx)e^{ix} = (-ax^2 - bx + 4i ax + 2a + 2ib)e^{ix}$$

- 6 Si calcola $\bar{y}'' + \bar{y}$: i termini $a x^2$ e $b x$ si cancellano.

$$\bar{y}'' + \bar{y} = (4i ax + 2a + 2ib)e^{ix}$$

- 7 Si uguaglia a $2x e^{ix}$: $4i a = 2$ e $2a + 2ib = 0$.

$$a = \frac{2}{4i} = -\frac{i}{2}, \quad b = \frac{-2a}{2i} = \frac{i}{2i} = \frac{1}{2}$$

- 8 Si scrive $\bar{y}$ e si separa la parte reale.

$$\bar{y} = \left(-\frac{i}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\right)(\cos x + i \sin x)$$

- 9 La parte reale è $x \cos x/2 + (x^2/2) \sin x$ (il prodotto $-i/2 \cdot i = 1/2$).

$$\operatorname{Re} \bar{y} = \frac{1}{2} x \cos x + \frac{1}{2} x^2 \sin x$$

RISULTATO

$$y(x) = k_1 \cos x + k_2 \sin x + (x/2) \cos x + (x^2/2) \sin x.$$

ESEMPIO

Termine noto con seno e polinomio. Risolvere $y'' + y = (x + 4) \sin 2x$.

- 1 Omogenea: $k_1 \cos x + k_2 \sin x$.

- 2 Si prende la parte immaginaria di una soluzione di $y'' + y = (x + 4) e^{2ix}$. Qui $h = 2i$ non è radice, quindi $s = 0$ e $m = 1$: $\bar{y} = (a x + b) e^{2ix}$.

$$\bar{y}' = (a + 2i ax + 2ib)e^{2ix}$$

3 Derivata seconda.

$$\bar{y}'' = (4ia - 4ax - 4b)e^{2ix}$$

4 Si calcola $\bar{y}'' + \bar{y}$.

$$\bar{y}'' + \bar{y} = (-3ax + 4ia - 3b)e^{2ix}$$

5 Si uguaglia a $(x + 4)e^{2ix}$: $-3a = 1$ e $4ia - 3b = 4$.

$$a = -\frac{1}{3}, \quad b = \frac{4ia - 4}{3} = -\frac{4}{3} - \frac{4}{9}i$$

6 Si scrive $\bar{y} = (ax + b)(\cos 2x + i \sin 2x)$ con $ax + b = -(x/3 + 4/3) - (4/9)i$.

$$\bar{y} = \left[-\left(\frac{x}{3} + \frac{4}{3}\right) - \frac{4}{9}i \right] (\cos 2x + i \sin 2x)$$

7 La parte immaginaria è la somma di $-(x/3 + 4/3) \sin 2x$ e di $-(4/9) \cos 2x$.

$$\text{Im } \bar{y} = -\left(\frac{x}{3} + \frac{4}{3}\right) \sin 2x - \frac{4}{9} \cos 2x$$

RISULTATO

$$y(x) = k_1 \cos x + k_2 \sin x - (x/3 + 4/3) \sin 2x - (4/9) \cos 2x.$$

ESEMPIO

Risonanza. Risolvere $y'' + 4y = \sin 2x$.

1 Omogenea: radici $\pm 2i$, quindi $k_1 \cos 2x + k_2 \sin 2x$.

2 Si considera $y'' + 4y = e^{2ix}$: $h = 2i$ è radice semplice, $m = 0$, $s = 1$. Si cerca $\bar{y} = c x e^{2ix}$.

$$\bar{y}'' = c(4i - 4x)e^{2ix}, \quad \bar{y}'' + 4\bar{y} = 4ic e^{2ix}$$

3 Si impone $4ic = 1$.

$$c = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4}$$

4 Si prende la parte immaginaria di $\bar{y} = -(i/4)x(\cos 2x + i \sin 2x) = (x/4) \sin 2x - (i/4)x \cos 2x$.

$$\text{Im } \bar{y} = -\frac{x}{4} \cos 2x$$

RISULTATO

$$y(x) = k_1 \cos 2x + k_2 \sin 2x - (x/4) \cos 2x. \text{ L'ampiezza cresce linearmente: è il fenomeno della risonanza.}$$

ESEMPIO

Principio di sovrapposizione. Risolvere $y'' - y = x + e^x$.

1 Omogenea: $\alpha^2 - 1 = 0$, radici ± 1 , quindi $k_1 e^x + k_2 e^{-x}$.

2 Si risolvono separatamente $y'' - y = x$ e $y'' - y = e^x$ e si sommano le soluzioni particolari.

3 Per $f_1 = x$: $h = 0$ non è radice, $m = 1$: $\bar{y}_1 = ax + b$ e $\bar{y}_1'' - \bar{y}_1 = -ax - b = x$, cioè $a = -1$ e $b = 0$.

$$\bar{y}_1 = -x$$

- 4 Per $f_2 = e^x$: $h = 1$ è radice semplice, $m = 0$, $s = 1$: $\bar{y}_2 = c x e^x$ con $\bar{y}_2'' = c(x+2)e^x$, quindi $\bar{y}_2'' - \bar{y}_2 = 2c e^x = e^x$.

$$c = \frac{1}{2}, \quad \bar{y}_2 = \frac{1}{2} x e^x$$

RISULTATO

$$y(x) = k_1 e^x + k_2 e^{-x} - x + (x/2) e^x.$$

ESEMPIO

Problema di Cauchy. Risolvere $y'' + 2y' - 3y = 0$ con $y(1) = 0$ e $y'(1) = 1$.

- 1 L'integrale generale è $y = k_1 e^x + k_2 e^{-3x}$ e $y' = k_1 e^x - 3k_2 e^{-3x}$.

- 2 Si impongono le due condizioni iniziali.

$$k_1 e + k_2 e^{-3} = 0, \quad k_1 e - 3k_2 e^{-3} = 1$$

- 3 Si sottrae la seconda dalla prima: $4 k_2 e^{-3} = -1$, quindi $k_2 = -e^3/4$.

$$k_2 = -\frac{e^3}{4}$$

- 4 Dalla prima, $k_1 e = -k_2 e^{-3} = 1/4$, quindi $k_1 = 1/(4e)$.

$$k_1 = \frac{1}{4e}$$

- 5 Si sostituiscono.

$$y(x) = \frac{e^{x-1}}{4} - \frac{e^{3-3x}}{4}$$

- 6 Verifica: $y(1) = 1/4 - 1/4 = 0$ e $y'(1) = 1/4 + 3/4 = 1$.

RISULTATO

$$y(x) = (e^{x-1} - e^{3-3x})/4.$$

Funzioni di due variabili

Il capitolo estende alle funzioni $f(x, y)$ i concetti visti per una variabile: limiti, continuità, derivate, differenziabilità ed estremi. La novità è che nel piano ci sono infinite direzioni di avvicinamento a un punto, e questo rende più delicate le definizioni.

Nozioni di topologia in $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2$ è l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali; un suo punto è $P = (x, y)$. Analogamente $\mathbb{R}^3$ è l'insieme delle terne (x, y, z) .

DEFINIZIONE

Distanza e intorno circolare. La distanza euclidea tra $P = (x, y)$ e $P_0 = (x_0, y_0)$ è $d(P, P_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. Dato $r > 0$, l'**intorno circolare** di P_0 di raggio r è $I_r(P_0) = \{P \in \mathbb{R}^2 : d(P, P_0) < r\}$, cioè il cerchio senza la circonferenza.

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Le definizioni seguenti servono per sapere dove ha senso calcolare limiti e derivate.

NOME	DEFINIZIONE
Punto interno	$P_0 \in A$ ed esiste $r > 0$ con $I_r(P_0) \subseteq A$. L'insieme dei punti interni è l'interno di A .
Insieme aperto	A è vuoto, oppure coincide con il proprio interno.
Insieme chiuso	Il complementare di A è aperto.
Punto di accumulazione	Ogni intorno di P_0 contiene punti di A diversi da P_0 . L'insieme di questi punti è il derivato DA .
Punto di frontiera	Ogni intorno di P_0 contiene punti di A e punti di $\mathbb{R}^2 \setminus A$. L'insieme è la frontiera ∂A .
Insieme limitato	Esistono P_0 e $r > 0$ con $A \subseteq I_r(P_0)$.

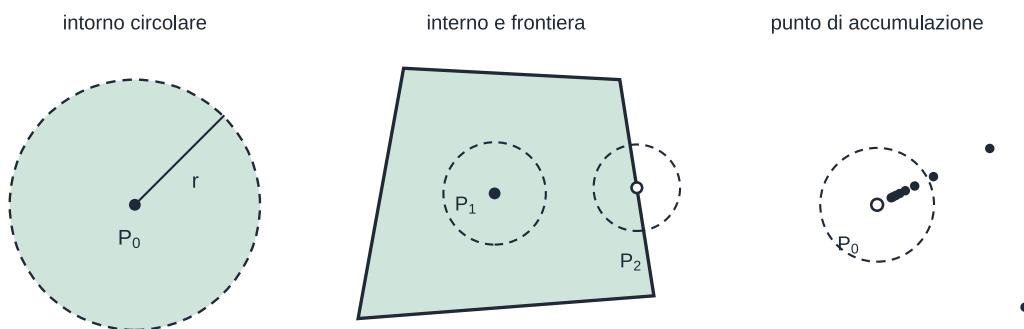


Figura 1. Da sinistra: un intorno circolare, un punto interno (P_1) e uno esterno (P_2), un punto di accumulazione.

Si può dimostrare che A è chiuso se e solo se $DA \subseteq A$, e anche se e solo se $\partial A \subseteq A$. Un punto di accumulazione non appartiene necessariamente ad A , e un punto di A non è necessariamente di accumulazione (un punto isolato).

ESEMPIO

Aperti, chiusi, limitati. Classificare $[-1, 3] \times [-2, 1]$ e i quattro insiemi $d(P, P_0) < r, \leq r, \geq r, > r$.

- 1 Il rettangolo $[-1, 3] \times [-2, 1]$ contiene la sua frontiera, che è l'unione dei quattro lati: è chiuso. È contenuto in un cerchio abbastanza grande: è limitato.
- 2 $d(P, P_0) < r$ è l'intorno circolare: aperto e limitato. La frontiera è la circonferenza di centro P_0 e raggio r .
- 3 $d(P, P_0) \leq r$ contiene la circonferenza: chiuso e limitato.
- 4 $d(P, P_0) \geq r$ è il complementare di un aperto: chiuso e non limitato. $d(P, P_0) > r$ è aperto e non limitato. Tutti e quattro hanno per frontiera la stessa circonferenza.

RISULTATO

Il rettangolo e il cerchio con bordo sono chiusi e limitati.

Generalità sulle funzioni di due variabili

DEFINIZIONE

Funzione di due variabili e grafico. Una funzione reale di due variabili reali è $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}^2$ non vuoto. Il **grafico** è $G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A, z = f(x, y)\}$, una superficie nello spazio.

Valgono le stesse definizioni delle funzioni di una variabile per limitatezza, estremo superiore e inferiore, massimo e minimo assoluti: (x_0, y_0) è un punto di massimo assoluto se $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ per ogni $(x, y) \in A$.

Alcuni grafici: la funzione costante $f(x, y) = k$ ha per grafico il piano orizzontale $z = k$. La proiezione $f(x, y) = x$ ha il piano $z = x$. La funzione lineare $f(x, y) = ax + by$ ha il piano $z = ax + by$. La funzione $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ha per grafico un cono, perché z è la distanza del punto dall'origine.

ESEMPIO

Dominio di una funzione. Determinare il dominio di $f_1 = x\sqrt{y-1}$, $f_2 = y^2 \log x$, $f_3 = (1/y)^4 \sqrt[4]{xy}$, $f_4 = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ e $f_5 = \log[(x-1)(y-2)]$.

- 1 f_1 : la radice richiede $y - 1 \geq 0$. Il dominio è il semipiano $y \geq 1$.
- 2 f_2 : il logaritmo richiede $x > 0$ (y è libera). Il dominio è il semipiano $x > 0$.
- 3 f_3 : occorre $y \neq 0$ (denominatore) e $x y \geq 0$ (radice di indice pari). La seconda condizione dice che x e y hanno segno concorde o uno dei due è nullo; con $y \neq 0$ si ottiene $y > 0$ e $x \geq 0$ oppure $y < 0$ e $x \leq 0$.
- 4 f_4 : occorre $x^2 + y^2 \geq 1$. Il dominio è l'esterno del cerchio unitario, circonferenza compresa.
- 5 f_5 : occorre $(x-1)(y-2) > 0$, cioè i due fattori hanno lo stesso segno. Si hanno $x > 1$ e $y > 2$, oppure $x < 1$ e $y < 2$: due quadranti aperti con vertice in $(1, 2)$.

RISULTATO

Rispettivamente: $y \geq 1$; $x > 0$; $(y > 0, x \geq 0)$ o $(y < 0, x \leq 0)$; $x^2 + y^2 \geq 1$; $(x > 1, y > 2)$ o $(x < 1, y < 2)$.

Limiti

Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ e (x_0, y_0) un punto di accumulazione per A .

DEFINIZIONE

Limite finito. f converge a $l \in \mathbb{R}$ per $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$, e si scrive $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = l$, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $(x, y) \in I_\delta(x_0, y_0) \cap A$, $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ implica $|f(x, y) - l| < \varepsilon$.

DEFINIZIONE

Limite infinito. f diverge a $+\infty$ ($-\infty$) se per ogni $k > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $(x, y) \in I_\delta(x_0, y_0) \cap A$, $(x, y) \neq (x_0, y_0)$, si ha $f(x, y) > k$ ($f(x, y) < -k$). Una funzione convergente o divergente si dice regolare.

Valgono tutti i teoremi sui limiti di una variabile: unicità, permanenza del segno, confronto, operazioni, e il teorema dei carabinieri.

ESEMPIO

Due limiti dalla definizione. Provare che $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} x = x_0$ e che $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 1/(x^2+y^2) = +\infty$.

- 1 Primo limite. Fissato $\varepsilon > 0$ si vuole $|x - x_0| < \varepsilon$. Poiché $|x - x_0| \leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = d(P, P_0)$, se $d(P, P_0) < \varepsilon$ la disuguaglianza vale: si sceglie $\delta = \varepsilon$.
- 2 Secondo limite. Fissato $k > 0$, per $(x, y) \neq (0, 0)$ la disuguaglianza $1/(x^2+y^2) > k$ equivale a $x^2 + y^2 < 1/k$.
$$\frac{1}{x^2+y^2} > k \iff x^2 + y^2 < \frac{1}{k} \iff \sqrt{x^2 + y^2} < \frac{1}{\sqrt{k}}$$
- 3 Basta quindi prendere $\delta = 1/\sqrt{k}$: ogni $(x, y) \in I_\delta(0, 0)$ diverso dall'origine verifica $f(x, y) > k$.

RISULTATO

Entrambi i limiti sono verificati.

DEFINIZIONE

Limite della funzione composta. Siano $g : A \rightarrow I \subseteq \mathbb{R}$ con $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x, y) = t_0$ e $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ con $\lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t) = l$. Allora $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \varphi(g(x, y)) = l$ (si assume t_0 di accumulazione per I).

ESEMPIO

Limiti con un limite notevole. Calcolare $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sin(x^2+y^2)/(x^2+y^2)$, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (e^{xy^2} - 1)/(xy^2)$ e $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \log(1 + x(y-1))/(x^2(y-1))$.

- 1 Primo limite. Con $g(x, y) = x^2 + y^2$ si ha $g \rightarrow 0$, e $\lim_{t \rightarrow 0} \sin t / t = 1$. Per il teorema del limite composto il risultato è 1.
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$
- 2 Secondo limite. Con $g(x, y) = x y^2 \rightarrow 0$ e $\lim_{t \rightarrow 0} (e^t - 1)/t = 1$ il risultato è 1 (la funzione è definita dove $x y^2 \neq 0$).

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{xy^2} - 1}{xy^2} = 1$$

3

Terzo limite. Con $t = x(y - 1) \rightarrow 0$ si ha $\log(1 + x(y - 1)) / (x^2(y - 1)) = [\log(1 + t)/t] \cdot (1/x)$.

$$\frac{\log(1 + x(y - 1))}{x^2(y - 1)} = \frac{\log(1 + t)}{t} \cdot \frac{1}{x} \longrightarrow 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$$

RISULTATO

I tre limiti valgono 1.

RESTRIZIONI E NON ESISTENZA DEL LIMITE

Se $E \subseteq A$ e (x_0, y_0) è di accumulazione per E , la **restrizione** $f|_E$ è f considerata solo sui punti di E .

DEFINIZIONE

Limite della restrizione. Se $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = l$, con l finito oppure $\pm\infty$, allora $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f|_E(x, y) = l$ per ogni $E \subseteq A$ di cui (x_0, y_0) è di accumulazione.

Dimostrazione (caso $l = +\infty$). Fissato $k > 0$, dall'ipotesi esiste $\delta_1 > 0$ con $f(x, y) > k$ in $A \cap I_{\delta_1}(x_0, y_0)$ meno il centro. Poiché $E \subseteq A$ la stessa disuguaglianza vale in $E \cap I_{\delta_1}$ meno il centro, e $f|_E = f$ su E : la tesi segue con $\delta = \delta_1$. Gli altri casi sono analoghi.

DA RICORDARE

Criterio per la non esistenza. Se due restrizioni $f|_{E_1}$ e $f|_{E_2}$ hanno limiti diversi per $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$, allora il limite di f **non esiste**. Se invece tutte le restrizioni provate hanno lo stesso limite l , non si può concludere che il limite esista: si ottiene solo che, se esiste, vale l . Per provare che esiste si usa la definizione o i carabinieri.

ESEMPIO

Limite che non esiste. Studiare $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy/(x^2 + y^2)$.

1

La forma è indeterminata $0/0$. Si prende la restrizione all'asse y , cioè $E_0 = \{x = 0, y \neq 0\}$: la funzione vale 0.

$$f|_{E_0} = 0 \implies \lim = 0$$

2

Si prende la restrizione alla retta $y = x$, cioè $E_1 = \{y = x, x \neq 0\}$.

$$f|_{E_1} = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \implies \lim = \frac{1}{2}$$

3

Con la retta $y = m x$ si ottiene più in generale $m/(1 + m^2)$, che dipende da m .

$$f|_{E_m} = \frac{mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{m}{1 + m^2}$$

RISULTATO

I limiti delle restrizioni sono diversi: il limite non esiste.

ESEMPIO

Limite che esiste (carabinieri). Calcolare $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x y^2/(x^2 + y^2)$.

1

Le restrizioni alle rette $y = m x$ danno $m^2 x / (1 + m^2)$, che tende a 0 per ogni m (e 0 sull'asse y). Quindi, se il limite esiste, vale 0.

$$f|_{E_m} = \frac{m^2 x^3}{x^2 + m^2 x^2} = \frac{m^2}{1 + m^2} x \rightarrow 0$$

- 2 Per provare che esiste si maggiore, usando $y^2 \leq x^2 + y^2$.

$$0 \leq |f(x, y)| = |x| \frac{y^2}{x^2 + y^2} \leq |x|$$

- 3 Poiché $|x| \rightarrow 0$, per il teorema dei carabinieri $|f(x, y)| \rightarrow 0$, quindi $f \rightarrow 0$.

RISULTATO

Il limite vale 0.

DA RICORDARE

Disuguaglianze utili. Per i carabinieri sono utili le disuguaglianze valide per $(x, y) \neq (0, 0)$: $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$, $|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$, $y^2/(x^2 + y^2) \leq 1$ e $|xy| \leq (x^2 + y^2)/2$. L'ultima si ottiene da $0 \leq (|x| - |y|)^2 = x^2 - 2|xy| + y^2$.

ESEMPIO

Un limite con radice cubica. Calcolare $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy / \sqrt[3]{x^2 + y^2}$.

- 1 Si usa $|xy| \leq (x^2 + y^2)/2$ e si semplifica la potenza al denominatore: $(x^2 + y^2) / (x^2 + y^2)^{1/3} = (x^2 + y^2)^{2/3}$.

$$0 \leq \frac{|xy|}{(x^2 + y^2)^{1/3}} \leq \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^{1/3}} = \frac{1}{2} (x^2 + y^2)^{2/3}$$

- 2 L'ultimo membro tende a 0 per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Per i carabinieri il limite vale 0.

RISULTATO

Il limite vale 0.

ESEMPIO

Le rette non bastano. Studiare $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 y / (x^4 + y^2)$.

- 1 Lungo le rette $y = m x$ si ottiene $m x^3 / (x^4 + m^2 x^2) = m x / (x^2 + m^2)$, che tende a 0 se $m \neq 0$. Lungo gli assi la funzione vale 0. Tutte le rette danno 0.

$$\eta_{E_m} = \frac{m x^3}{x^4 + m^2 x^2} = \frac{m x}{x^2 + m^2} \rightarrow 0$$

- 2 Si prova allora la parabola $y = x^2$: il numeratore vale x^4 e il denominatore $x^4 + x^4$.

$$f(x, x^2) = \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2}$$

RISULTATO

Il limite non esiste: lungo la parabola vale 1/2, lungo le rette 0.

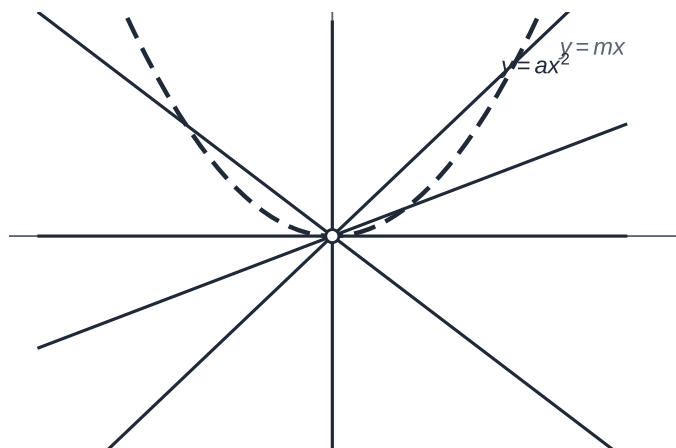


Figura 2. Alcune rette per l'origine (tutte con limite 0 nell'ultimo esempio) e una parabola (limite 1/2): le rette non bastano a provare che un limite esiste.

ESEMPIO

Funzione non nulla solo su una parabola. Sia $f(x, y) = 1$ se $y = x^2$ e $f(x, y) = 0$ altrimenti. Studiare il limite in $(0, 0)$.

- 1 Su ogni retta $y = m x$ ($x \neq 0$) la funzione vale 0 per x abbastanza piccolo (l'intersezione con la parabola è solo $x = m$ oltre all'origine), quindi il limite della restrizione è 0.
- 2 Sulla parabola $E = \{y = x^2\}$ la funzione vale 1 identicamente, quindi il limite della restrizione è 1.

RISULTATO

Il limite non esiste.

Funzioni continue

DEFINIZIONE

Continuità. $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in $(x_0, y_0) \in A$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $(x, y) \in A \cap I_\delta(x_0, y_0)$ implica $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$. È continua in A se lo è in ogni punto di A .

Come in una variabile: se (x_0, y_0) è di accumulazione per A , f è continua in (x_0, y_0) se e solo se $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$. Se invece è un punto isolato, f è continua in esso. Somma, prodotto, quoziente (con denominatore non nullo) e valore assoluto di funzioni continue sono continue. Se g_1, g_2 sono continue in t_0 e f è continua in $(g_1(t_0), g_2(t_0))$, anche $F(t) = f(g_1(t), g_2(t))$ è continua in t_0 .

DEFINIZIONE

Teorema di Weierstrass. Una funzione continua in un insieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^2$ ha massimo e minimo assoluti.

ESEMPIO

Continuità in un punto. Dire se $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$ per $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = 0$ è continua in $(0, 0)$.

- 1 Il limite in $(0, 0)$ non esiste (esempio precedente), quindi non può essere uguale a $f(0, 0) = 0$.

RISULTATO

f non è continua in $(0, 0)$, anche se esiste $f(0,0)$ e le restrizioni agli assi sono nulle.

Derivate parziali

DEFINIZIONE

Derivate parziali. Sia (x_0, y_0) un punto interno ad A . Se la funzione $g(x) = f(x, y_0)$ è derivabile in x_0 , il numero $g'(x_0)$ è la derivata parziale di f rispetto a x e si indica con $f_x(x_0, y_0)$ o $\partial f / \partial x(x_0, y_0)$: $f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)) / h$. In modo analogo $f_y(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)) / h$.

Derivare rispetto a x significa quindi trattare y come una costante e derivare come in una variabile. Il vettore $\nabla f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$ è il **gradiente** di f in (x_0, y_0) .

ESEMPIO

Gradiente di funzioni elementari. Calcolare ∇f per $f = 4x^5y^3 - x^4 + y^2 - 2x + 6y$ in $(1, 0)$ e per $f = \sin(xy)/y$ in $(\pi/2, 1/2)$.

- 1 Primo caso. Si deriva rispetto a x trattando y come costante, poi rispetto a y .

$$f_x = 20x^4y^3 - 4x^3 - 2, \quad f_y = 12x^5y^2 + 2y + 6$$

- 2 Si calcola in $(1, 0)$.

$$\nabla f(1, 0) = (0 - 4 - 2, 0 + 0 + 6) = (-6, 6)$$

- 3 Secondo caso. Si deriva il quoziente: rispetto a x il fattore $1/y$ è costante.

$$f_x = \frac{y \cos(xy)}{y} = \cos(xy), \quad f_y = \frac{xy \cos(xy) - \sin(xy)}{y^2}$$

- 4 In $(\pi/2, 1/2)$ si ha $xy = \pi/4$, con $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$.

$$f_x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad f_y = \frac{\frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\pi - 4)$$

RISULTATO

$\nabla f(1, 0) = (-6, 6)$ e $\nabla f(\pi/2, 1/2) = (\sqrt{2}/2, (\sqrt{2}/2)(\pi - 4))$.

ESEMPIO

Derivate parziali e punti singolari. Studiare le derivate parziali in $(0, 0)$ di $f_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$ e di $f_2 = |xy|$.

- 1 $f_1(x, 0) = \sqrt{x^2} = |x|$ non è derivabile in $x = 0$: non esiste $f_x(0, 0)$, e in modo analogo non esiste $f_y(0, 0)$. Fuori dall'origine esistono e valgono $x/\sqrt{x^2 + y^2}$ e $y/\sqrt{x^2 + y^2}$.
- 2 $f_2(x, 0) = 0$ per ogni x : esiste $f_x(0, 0) = 0$, e analogamente $f_y(0, 0) = 0$.
- 3 In $(0, 1)$: $f_2(x, 1) = |x|$ non è derivabile in 0 , quindi non esiste $f_x(0, 1)$; invece $f_2(0, y) = 0$ e quindi $f_y(0, 1) = 0$.

4

Fuori dagli assi, usando $D|t| = t/|t|$ per $t \neq 0$.

$$f_x = |y| \frac{x}{|x|}, \quad f_y = |x| \frac{y}{|y|}$$

RISULTATO

Una funzione può avere derivate parziali in un punto e non averle in altri: lo studio va fatto punto per punto.

DERIVATE SECONDE

Se il dominio è aperto e f_x, f_y esistono in ogni punto, si possono derivare ancora. Le derivate seconde sono f_{xx}, f_{yy} (pure) e $f_{xy} = \partial/\partial y (f_x), f_{yx} = \partial/\partial x (f_y)$ (miste).

ESEMPIO

Derivate seconde di un polinomio. Calcolare le derivate seconde di $f = x^2y - 3xy^3 + 2x^2y^2 + xy$.

1

Derivate prime.

$$f_x = 2xy - 3y^3 + 4xy^2 + y, \quad f_y = x^2 - 9xy^2 + 4x^2y + x$$

2

Derivate seconde pure.

$$f_{xx} = 2y + 4y^2, \quad f_{yy} = -18xy + 4x^2$$

3

Derivate seconde miste: si deriva f_x rispetto a y e f_y rispetto a x .

$$f_{xy} = 2x - 9y^2 + 8xy + 1, \quad f_{yx} = 2x - 9y^2 + 8xy + 1$$

RISULTATO

Le due derivate miste coincidono: ciò accade sotto le ipotesi del teorema di Schwarz.

Non è sempre così. Si consideri $f(x, y) = xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ per $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = 0$.

ESEMPIO

Derivate miste diverse. Mostrare che per la funzione $f(x, y) = xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$, $f(0, 0) = 0$, si ha $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$.

1

In $(0, 0)$: $f(x, 0) = 0$ e $f(0, y) = 0$, quindi $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$.

2

Fuori dall'origine si calcolano le derivate prime: $f_x = y(x^4 - y^4 + 4x^2y^2)/(x^2 + y^2)^2$ e $f_y = x(x^4 - y^4 - 4x^2y^2)/(x^2 + y^2)^2$. Ponendo $x = 0$ nella prima e $y = 0$ nella seconda:

$$f_x(0, y) = \frac{y \cdot (-y^4)}{y^4} = -y, \quad f_y(x, 0) = \frac{x \cdot x^4}{x^4} = x$$

3

Queste valgono anche in $y = 0$ e $x = 0$ rispettivamente (dove le derivate sono nulle). Derivando $f_x(0, y) = -y$ rispetto a y e $f_y(x, 0) = x$ rispetto a x :

$$f_{xy}(0, 0) = -1, \quad f_{yx}(0, 0) = 1$$

RISULTATO

$f_{xy}(0, 0) = -1 \neq 1 = f_{yx}(0, 0)$.

DEFINIZIONE

Lemma di Schwarz. Sia A aperto e $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ dotata in A delle derivate seconde miste f_{xy} e f_{yx} . Se esse sono continue in (x_0, y_0) , allora $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$. (Enunciato senza dimostrazione.)

Nell'esempio precedente le derivate miste non sono continue nell'origine, quindi il lemma non si applica.

Differenziabilità

In una variabile la derivabilità implica la continuità. Per due variabili l'esistenza delle derivate parziali non basta: la funzione $xy/(x^2+y^2)$ (con valore 0 nell'origine) ha $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ ma è discontinua nell'origine. Serve una proprietà più forte, che nasce da questa osservazione: φ è derivabile in c se e solo se $\Delta\varphi = l h + o(|h|)$, cioè l'incremento si approssima con una funzione lineare con errore di ordine superiore.

DEFINIZIONE

Differenziabilità. Sia (x_0, y_0) interno ad A . f è differenziabile in (x_0, y_0) se esistono $l, m \in \mathbb{R}$ tali che $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = l h + m k + o(\sqrt{h^2+k^2})$ per $(h, k) \rightarrow (0, 0)$. Equivalentemente $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} [f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - (l h + m k)] / \sqrt{h^2+k^2} = 0$.

Si chiama **incremento** $\Delta f(h, k) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)$. La funzione lineare $(h, k) \mapsto l h + m k$ è il **differenziale** $df(x_0, y_0)$.

DEFINIZIONE

Differenziabile implica continua e derivabile. Se f è differenziabile in (x_0, y_0) allora: (i) f è continua in (x_0, y_0) ; (ii) esistono $f_x(x_0, y_0) = l$ e $f_y(x_0, y_0) = m$.

DIMOSTRAZIONE

(i) La continuità equivale a $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \Delta f = 0$. Si scrive Δf come

$$\Delta f = \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - l h - m k}{\sqrt{h^2+k^2}} \cdot \sqrt{h^2+k^2} + (l h + m k).$$

Il primo fattore tende a 0 per la differenziabilità, il secondo a 0 perché è la distanza dall'origine, e $l h + m k \rightarrow 0$. Dunque $\Delta f \rightarrow 0$.

(ii) Si pone $g(h, k) = [\Delta f(h, k) - (l h + m k)] / \sqrt{h^2+k^2}$, che tende a 0. Anche la restrizione all'insieme $k = 0, h \neq 0$ tende a 0, cioè

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0) - l h}{|h|} = 0.$$

Poiché $|h|/h$ vale ± 1 , un'espressione che tende a 0 dividendo per $|h|$ tende a 0 anche dividendo per h . Quindi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0) - l h}{h} + l \right] = l.$$

Perciò $f_x(x_0, y_0) = l$. Allo stesso modo $f_y(x_0, y_0) = m$. Segue $df(x_0, y_0)(h, k) = f_x(x_0, y_0) h + f_y(x_0, y_0) k$.

DA RICORDARE

Schema delle implicazioni. Una funzione differenziabile in un punto è continua e ha le derivate parziali; i viceversa sono falsi. Per provare che f **non** è differenziabile basta dimostrare che non è continua, o che manca una derivata parziale, oppure che il limite $[\Delta f - df]/\sqrt{h^2+k^2}$ non è 0. Per provare che lo è, si usa il teorema del differenziale totale.

ESEMPIO

Differenziabilità nell'origine. Studiare la differenziabilità in $(0, 0)$ di: (a) $xy/(x^2+y^2)$ con $f(0,0) = 0$; (b) $\sqrt{x^2+y^2}$; (c) $\sqrt{|xy|}$; (d) $|xy|$.

- 1 (a) non è continua nell'origine, quindi non è differenziabile.
- 2 (b) non ha derivate parziali nell'origine, quindi non è differenziabile.
- 3 (c) è continua e ha $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$, quindi $df(0, 0) = 0$. Si studia il quoziente $[f(h, k) - f(0, 0) - 0] / \sqrt{h^2+k^2}$.
$$\frac{\sqrt{|hk|}}{\sqrt{h^2+k^2}}$$
- 4 Lungo $k = h$ vale $|h| / (|h| \sqrt{2}) = 1/\sqrt{2}$, mentre lungo $k = 0$ vale 0: il limite non esiste, quindi (c) non è differenziabile.
- 5 (d) è continua, con $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ e $df(0, 0) = 0$. Il quoziente è $|hk| / \sqrt{h^2+k^2}$ e si maggiora con $|h| / \sqrt{h^2+k^2} \leq 1$.
$$0 \leq \frac{|hk|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}} |k| \leq |k| \rightarrow 0$$
- 6 Per i carabinieri il limite è 0: (d) è differenziabile nell'origine, con $df(0, 0) = 0$.

RISULTATO

Solo (d) è differenziabile in $(0, 0)$.

DEFINIZIONE

Teorema del differenziale totale. Sia A aperto e $(x_0, y_0) \in A$. Se f è derivabile parzialmente rispetto a x in (x_0, y_0) e rispetto a y in tutto A , con f_y continua in (x_0, y_0) , allora f è differenziabile in (x_0, y_0) . In particolare, se f ha derivate parziali prime continue in A , è differenziabile in ogni punto.

DIMOSTRAZIONE

Si scrive $\Delta f - df$ spezzando l'incremento in due passi, prima lungo y e poi lungo x :

$$\Delta f - df = [f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f_y(x_0, y_0)k] + [f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h].$$

Primo termine. La funzione $y \mapsto f(x_0 + h, y)$ è derivabile, quindi per il teorema di Lagrange esiste $\bar{y}$ compreso tra y_0 e $y_0 + k$ con $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) = f_y(x_0 + h, \bar{y})k$. Il primo termine vale $[f_y(x_0 + h, \bar{y}) - f_y(x_0, y_0)]k$.

Fissato $\varepsilon > 0$, per la continuità di f_y in (x_0, y_0) esiste δ_1 tale che $|f_y(x, y) - f_y(x_0, y_0)| < \varepsilon/2$ se $d((x, y), (x_0, y_0)) < \delta_1$. Se $\sqrt{h^2+k^2} < \delta_1$ il punto $(x_0 + h, \bar{y})$ è a distanza minore di δ_1 (perché $|\bar{y} - y_0| \leq |k|$), quindi il primo termine è in modulo al più $(\varepsilon/2) |k| \leq (\varepsilon/2) \sqrt{h^2+k^2}$.

Secondo termine. Poiché $f_x(x_0, y_0)$ esiste, $f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h = o(|h|)$: esiste δ_2 tale che il modulo è al più $(\varepsilon/2) |h| \leq (\varepsilon/2) \sqrt{h^2+k^2}$ per $|h| < \delta_2$.

Con $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, per $0 < \sqrt{h^2+k^2} < \delta$ si ha $|\Delta f - df| / \sqrt{h^2+k^2} < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, che è la definizione di differenziabilità.

Il differenziale permette di approssimare la funzione vicino al punto con il **piano tangente** al grafico: $z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$.

ESEMPIO

Piano tangente. Scrivere il piano tangente al grafico di $f(x, y) = x^2 + y^2$ nel punto $(1, 2)$.

- 1 $f(1, 2) = 5$. Le derivate parziali sono $f_x = 2x$ e $f_y = 2y$, continue in $\mathbb{R}^2$: f è differenziabile ovunque.

$$f_x(1, 2) = 2, \quad f_y(1, 2) = 4$$

- 2 Si sostituisce nell'equazione del piano tangente.

$$z = 5 + 2(x - 1) + 4(y - 2) = 2x + 4y - 5$$

RISULTATO

Il piano tangente è $z = 2x + 4y - 5$.

DERIVAZIONE DELLE FUNZIONI COMPOSITE

DEFINIZIONE

Derivata della funzione composta. Siano $g_1, g_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabili in t_0 e tali che $(g_1(t), g_2(t)) \in A$ per ogni t . Se f è differenziabile in $(g_1(t_0), g_2(t_0))$, allora $F(t) = f(g_1(t), g_2(t))$ è derivabile in t_0 e $F'(t_0) = f_x(g_1(t_0), g_2(t_0))g_1'(t_0) + f_y(g_1(t_0), g_2(t_0))g_2'(t_0)$, cioè $F'(t_0) = \nabla f \cdot (g_1', g_2')$.

DIMOSTRAZIONE

Si pone $x_0 = g_1(t_0)$, $y_0 = g_2(t_0)$ e, per s piccolo, $h = g_1(t_0 + s) - x_0$, $k = g_2(t_0 + s) - y_0$. La differenziabilità dà $\Delta f = f_x h + f_y k + \omega(h, k) \sqrt{h^2 + k^2}$, con $\omega(h, k) \rightarrow 0$ per $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ (e $\omega(0, 0) = 0$). Dividendo per s :

$$\frac{F(t_0 + s) - F(t_0)}{s} = f_x \frac{h}{s} + f_y \frac{k}{s} + \omega(h, k) \cdot \frac{\sqrt{h^2 + k^2}}{s}.$$

Per $s \rightarrow 0$: $h/s \rightarrow g_1'(t_0)$ e $k/s \rightarrow g_2'(t_0)$ (derivabilità), quindi $\sqrt{h^2 + k^2}/|s|$ resta limitato, tendendo a $\sqrt{g_1'^2 + g_2'^2}$. Inoltre $h, k \rightarrow 0$ perché g_1, g_2 sono continue, e perciò $\omega \rightarrow 0$. L'ultimo termine tende a 0 e il limite è $f_x g_1' + f_y g_2'$.

ESEMPIO

Regola della catena. Sia $f(x, y) = x^2 y$ con $x = t^2$ e $y = \sin t$. Calcolare $F'(t)$ con $F(t) = f(t^2, \sin t)$.

- 1 Derivate parziali di f : $f_x = 2xy$ e $f_y = x^2$. Derivate di g_1, g_2 : $g_1' = 2t$ e $g_2' = \cos t$.

- 2 Si applica la formula e si sostituisce $x = t^2$, $y = \sin t$.

$$F'(t) = 2t^2 \sin t \cdot 2t + t^4 \cdot \cos t = 4t^3 \sin t + t^4 \cos t$$

- 3 Verifica: $F(t) = t^4 \sin t$, la cui derivata è $4t^3 \sin t + t^4 \cos t$.

RISULTATO

$$F'(t) = 4t^3 \sin t + t^4 \cos t.$$

Derivate direzionali

DEFINIZIONE

Derivata direzionale. Sia $v = (v_1, v_2)$ un versore (vettore di lunghezza 1) e (x_0, y_0) interno ad A . La derivata direzionale di f lungo v in (x_0, y_0) è, se esiste, $D_v f(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} (f(x_0 + t v_1, y_0 + t v_2) - f(x_0, y_0))/t$, cioè la derivata in $t = 0$ della funzione $F(t) = f(x_0 + t v_1, y_0 + t v_2)$.

Per $v = e_1 = (1, 0)$ si ottiene f'_x , per $v = e_2 = (0, 1)$ si ottiene f'_y . Il viceversa è falso: una funzione può avere le due derivate parziali e non avere le altre derivate direzionali. Per $f = xy/(x^2 + y^2)$ ($f(0,0) = 0$) la derivata nell'origine lungo v è $\lim_{t \rightarrow 0} v_1 v_2/t$, che esiste solo se $v_1 v_2 = 0$.

DEFINIZIONE

Formula del gradiente. Se f è differenziabile in (x_0, y_0) , allora esiste $D_v f(x_0, y_0)$ per ogni versore v e $D_v f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot v = f'_x v_1 + f'_y v_2$.

Dimostrazione. Si applica il teorema della derivata composta con $g_1(t) = x_0 + t v_1$ e $g_2(t) = y_0 + t v_2$, per cui $g'_1(0) = v_1$ e $g'_2(0) = v_2$.

Dalla disuguaglianza di Cauchy e Schwarz, $D_v f = \nabla f \cdot v = |\nabla f| \cos \theta \leq |\nabla f|$, dove θ è l'angolo tra ∇f e v : la derivata direzionale è massima quando v ha la direzione del gradiente (se $\nabla f \neq 0$), e vale $|\nabla f|$.

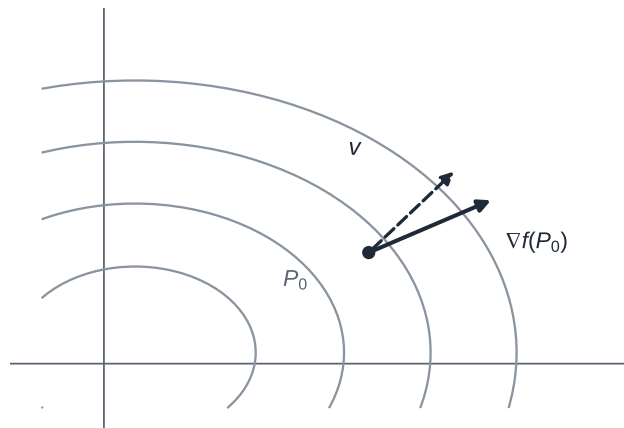


Figura 3. Linee di livello di f , gradiente $\nabla f(P_0)$ e un versore v . La derivata direzionale è il prodotto scalare $\nabla f(P_0) \cdot v$.

ESEMPIO

Una funzione con tutte le derivate direzionali ma non differenziabile. Studiare $f(x, y) = xy^2/(x^2 + y^2)$, $f(0, 0) = 0$, in $(0, 0)$.

- 1 Per un versore $v = (v_1, v_2)$ si ha $F(t) = f(t v_1, t v_2) = t v_1 v_2^2$, quindi $D_v f(0, 0) = v_1 v_2^2$ per ogni v . In particolare $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$.
- 2 Se f fosse differenziabile, $D_v f(0, 0)$ sarebbe $\nabla f \cdot v = 0$ per ogni v . Ma per $v = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ si ha $D_v f = 1/(2\sqrt{2}) \neq 0$.

$$D_v f(0, 0) = v_1 v_2^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \neq 0$$

RISULTATO

f non è differenziabile in $(0, 0)$ pur avendo ogni derivata direzionale.

ESEMPIO

Derivata lungo una retta. Calcolare la derivata direzionale di $f(x, y) = x \log(x^2 + y^2 + 3)$ in $(0, 1)$ lungo la direzione della retta $2x - y + 6 = 0$.

1 f ha derivate parziali continue in $\mathbb{R}^2$, quindi è differenziabile e vale la formula del gradiente.

2 Derivate parziali.

$$f_x = \log(x^2 + y^2 + 3) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2 + 3}, \quad f_y = \frac{2xy}{x^2 + y^2 + 3}$$

3 Nel punto $(0, 1)$: $x = 0$ annulla le frazioni, e $\log(0 + 1 + 3) = \log 4$.

$$\nabla f(0, 1) = (\log 4, 0)$$

4 La retta $y = 2x + 6$ ha pendenza 2 ed è parallela a $(1, 2)$, di lunghezza $\sqrt{5}$. Il versore è $v = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ (il versore opposto darebbe il risultato con segno cambiato).

$$v = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$$

5 Si calcola il prodotto scalare.

$$D_v f(0, 1) = \log 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + 0 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{\log 4}{\sqrt{5}}$$

RISULTATO

$$D_v f(0, 1) = \log 4 / \sqrt{5}.$$

Estremi relativi

DEFINIZIONE

Estremo relativo. $(x_0, y_0) \in A$ è un punto di massimo (minimo) relativo se esiste $\delta > 0$ tale che $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ ($\geq$) per ogni $(x, y) \in A \cap I_\delta(x_0, y_0)$.

DEFINIZIONE

Teorema di Fermat. Se (x_0, y_0) è interno ad A , è un punto di estremo relativo e f ha derivata lungo il versore v in (x_0, y_0) , allora $D_v f(x_0, y_0) = 0$. In particolare, se esistono le derivate parziali prime, $\nabla f(x_0, y_0) = 0$.

Dimostrazione. La funzione $F(t) = f(x_0 + t v_1, y_0 + t v_2)$ ha un estremo relativo in $t = 0$ e vi è derivabile, quindi $F'(0) = 0$ per il teorema di Fermat di una variabile. Ma $F'(0) = D_v f(x_0, y_0)$.

I punti interni in cui $\nabla f = 0$ si dicono **stazionari**. Un punto stazionario non è necessariamente di estremo: per $f(x, y) = xy$ si ha $\nabla f = (y, x)$, quindi $(0, 0)$ è stazionario, ma $f(0, 0) = 0$ e in ogni intorno ci sono punti con $xy > 0$ e punti con $xy < 0$. I punti stazionari che non sono di estremo relativo si chiamano **punti di sella**.

Se f ha derivate seconde, l'**Hessiano** in (x, y) è il determinante

$$H(x, y) = f_{xx}(x, y) f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y) f_{yx}(x, y).$$

Con derivate seconde continue vale $f_{xy} = f_{yx}$ (Schwarz), e quindi $H = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$.

DEFINIZIONE

Condizioni necessarie del secondo ordine. Se f ha derivate seconde continue in A e (x_0, y_0) è di massimo (minimo) relativo, allora $f_{xx}(x_0, y_0) \leq 0$ (≥ 0) e $H(x_0, y_0) \geq 0$.

DEFINIZIONE

Condizioni sufficienti del secondo ordine. Se f ha derivate seconde continue in A , $\nabla f(x_0, y_0) = 0$, $H(x_0, y_0) > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ (> 0), allora (x_0, y_0) è di massimo (minimo) relativo. (Enunciati senza dimostrazione.)

Se $H > 0$ allora $f_{xx} f_{yy} > f_{xy}^2 \geq 0$, quindi $f_{xx} \neq 0$ e f_{xx}, f_{yy} hanno lo stesso segno. Se $H < 0$ il punto non è di estremo, perché contraddice la condizione necessaria $H \geq 0$: è una sella.

DA RICORDARE

Ricerca degli estremi relativi. Procedura. (1) Si risolve $f_x = 0, f_y = 0$. (2) Si calcolano f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} e H in ogni punto stazionario. (3) Se $H > 0$ e $f_{xx} > 0$: minimo relativo; se $H > 0$ e $f_{xx} < 0$: massimo relativo; se $H < 0$: sella. (4) Se $H = 0$ il criterio non decide e si studia la definizione (ad esempio il segno di $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ vicino al punto).

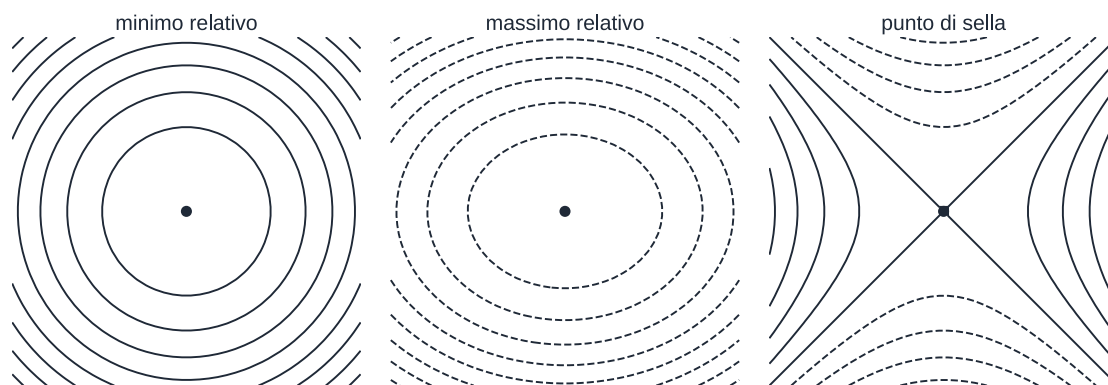


Figura 4. Linee di livello vicino a un punto stazionario: le curve chiuse concentriche indicano un minimo o un massimo, le curve a iperbole una sella.

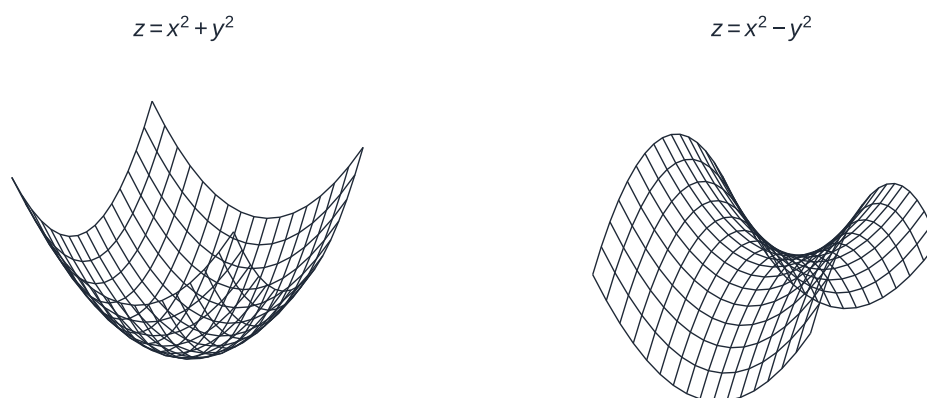


Figura 5. I grafici del paraboloide $z = x^2 + y^2$ (minimo nell'origine) e della sella $z = x^2 - y^2$.

ESEMPIO

Estremi relativi: due funzioni. Trovare gli estremi relativi di $f = 2x^2 + xy - y$ e di $g = x^3 + y^2 - 2xy$.

- 1 Per f : $f_x = 4x + y$ e $f_y = x - 1$. Il sistema $4x + y = 0$, $x - 1 = 0$ dà $x = 1$, $y = -4$: un solo punto stazionario $(1, -4)$.
- 2 Derivate seconde di f : $f_{xx} = 4$, $f_{xy} = 1$, $f_{yy} = 0$. L'Hessiano è $H = 4 \cdot 0 - 1^2 = -1 < 0$: $(1, -4)$ è un punto di sella.
- 3 Per g : $g_x = 3x^2 - 2y$ e $g_y = 2y - 2x$. Dalla seconda $y = x$; sostituendo nella prima $3x^2 - 2x = 0$, cioè $x = 0$ o $x = 2/3$. Punti stazionari $(0, 0)$ e $(2/3, 2/3)$.
- 4 Derivate seconde di g : $g_{xx} = 6x$, $g_{xy} = -2$, $g_{yy} = 2$, quindi $H(x, y) = 12x - 4$.
$$H(0, 0) = -4 < 0, \quad H\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = 8 - 4 = 4 > 0$$
- 5 In $(0, 0)$ l'Hessiano è negativo: sella. In $(2/3, 2/3)$ l'Hessiano è positivo e $g_{xx} = 6 \cdot 2/3 = 4 > 0$: minimo relativo.

RISULTATO

f ha solo una sella in $(1, -4)$. g ha una sella in $(0, 0)$ e un minimo relativo in $(2/3, 2/3)$.

ESEMPIO

Hessiano nullo. Studiare $f = x^4 + y^4$ e $g = x^4 - y^4$ nell'origine.

- 1 In entrambi i casi $\nabla = (4x^3, \pm 4y^3)$ si annulla in $(0, 0)$, e le derivate seconde $12x^2, 0, \pm 12y^2$ sono nulle in $(0, 0)$: $H(0, 0) = 0$. Il criterio non decide.
- 2 Per f : $f(x, y) = x^4 + y^4 \geq 0 = f(0, 0)$, quindi $(0, 0)$ è un minimo relativo (anche assoluto).
- 3 Per g : sull'asse x , $g(x, 0) = x^4 > 0$ e sull'asse y , $g(0, y) = -y^4 < 0$, per $x, y \neq 0$: in ogni intorno ci sono valori maggiori e minori di $g(0, 0) = 0$, quindi è una sella.

RISULTATO

Con $H = 0$ lo stesso punto può essere minimo o sella: occorre la definizione.

Estremi assoluti

Sia A chiuso e limitato e f continua in A : per il teorema di Weierstrass f ha massimo e minimo assoluti. I punti in cui sono assunti vanno cercati tra gli elementi di tre insiemi:

- A_1 , i punti interni ad A stazionari ($\nabla f = 0$).
- A_2 , i punti interni ad A in cui manca una derivata parziale e l'altra è nulla, oppure mancano entrambe.
- A_3 , i punti della frontiera di A .

Si calcola f in tutti i punti candidati e si confrontano i valori: il più grande è il massimo e il più piccolo è il minimo. Per A_3 , se la frontiera è una unione di segmenti si studia f su ogni lato come funzione di una variabile (derivata uguale a zero più estremi del lato). Se è parametrizzabile, $\partial A = \{(g_1(t), g_2(t)) : t \in [a, b]\}$, si studia $F(t) = f(g_1(t), g_2(t))$ in $[a, b]$.

ESEMPIO

Quadrato. Trovare gli estremi assoluti di $f(x, y) = 2x^2 - xy - y$ nel quadrato di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$.

- 1 f è continua e il quadrato è chiuso e limitato: massimo e minimo esistono.

- 2 A_1 : il sistema $f_x = 4x - y = 0$, $f_y = -x - 1 = 0$ dà $(-1, -4)$, fuori dal quadrato. $A_1 = \emptyset$. f è derivabile ovunque: $A_2 = \emptyset$.
- 3 Lato $y = 1$: $g(x) = f(x, 1) = 2x^2 - x - 1$, con $g'(x) = 4x - 1 = 0$ per $x = 1/4$. Punto candidato $(1/4, 1)$.
- 4 Lato $x = 1$: $h(y) = f(1, y) = 2 - 2y$, decrescente: nessun punto interno. Lato $y = 0$: $f(x, 0) = 2x^2$, derivata $4x$ nulla solo in $x = 0$ (vertice). Lato $x = 0$: $f(0, y) = -y$, nessun punto stazionario.
- 5 Candidati: i quattro vertici e $(1/4, 1)$. Si calcola f .

$$f(0, 0) = 0, \quad f(1, 0) = 2, \quad f(0, 1) = -1, \quad f(1, 1) = 0, \quad f\left(\frac{1}{4}, 1\right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{9}{8}$$

RISULTATO

Massimo assoluto 2 in $(1, 0)$, minimo assoluto $-9/8$ in $(1/4, 1)$.

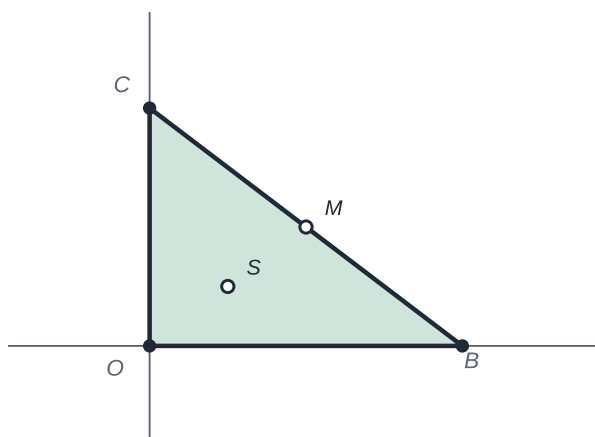


Figura 6. Il triangolo A dell'esempio seguente, con il punto stazionario interno S e il punto M del lato obliquo.

ESEMPIO

Triangolo. Trovare gli estremi assoluti di $f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y$ nel triangolo di vertici $O = (0, 0)$, $B = (2, 0)$, $C = (0, 2)$.

- 1 A_1 : $f_x = 2x - 1 = 0$, $f_y = 2y - 1 = 0$ dà $S = (1/2, 1/2)$, interno al triangolo ($x + y = 1 < 2$). $f(S) = 1/4 + 1/4 - 1 = -1/2$. $A_2 = \emptyset$.
 - 2 Lato OB ($y = 0$): $f(x, 0) = x^2 - x$, $x \in [0, 2]$, derivata $2x - 1 = 0$ in $x = 1/2$: candidato $(1/2, 0)$ con valore $-1/4$. Lo stesso accade sul lato OC : $(0, 1/2)$ con valore $-1/4$.
 - 3 Lato BC ($y = 2 - x$): $f(x, 2 - x) = x^2 + (2 - x)^2 - 2 = 2x^2 - 4x + 2 = 2(x - 1)^2$, derivata $4(x - 1) = 0$ in $x = 1$: candidato $M = (1, 1)$ con valore 0.
- $$f(x, 2 - x) = x^2 + 4 - 4x + x^2 - 2 = 2x^2 - 4x + 2$$
- 4 Valori ai vertici: $f(O) = 0$, $f(B) = 4 - 2 = 2$, $f(C) = 2$.
 - 5 Si confrontano tutti i valori: $-1/2, -1/4, -1/4, 0, 0, 2, 2$.

RISULTATO

Minimo assoluto $-1/2$ in $(1/2, 1/2)$, massimo assoluto 2 nei vertici B e C .

ESEMPIO

Un punto non derivabile e una frontiera parametrizzata. Trovare gli estremi assoluti di $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - x$ nel cerchio $x^2 + y^2 \leq 1$.

- 1 f è continua e il cerchio è chiuso e limitato. f non ha derivate parziali nell'origine, che è interna: $A_2 = \{(0, 0)\}$, con $f(0, 0) = 0$.
- 2 A_1 : fuori dall'origine $f_x = x/\sqrt{x^2 + y^2} - 1$ e $f_y = y/\sqrt{x^2 + y^2}$. Da $f_y = 0$ segue $y = 0$ e da $f_x = 0$ segue $x = |x|$, cioè $x > 0$. Sono stazionari tutti i punti $(x, 0)$ con $0 < x < 1$, dove $f = |x| - x = 0$.
- 3 Frontiera: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$, e $F(t) = 1 - \cos t$. La derivata $\sin t$ si annulla in $t = \pi$ (e agli estremi $0, 2\pi$). $F(\pi) = 2$, $F(0) = F(2\pi) = 0$.

$$F(t) = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} - \cos t = 1 - \cos t$$

- 4 Confronto: i valori sono 0 (origine e segmento) e 0, 2 (frontiera).
- 5 Poiché $\sqrt{x^2 + y^2} \geq |x| \geq x$, si ha $f \geq 0$ ovunque, coerente con il minimo trovato.

RISULTATO

Minimo assoluto 0 (assunto nei punti $(x, 0)$ con $0 \leq x \leq 1$), massimo assoluto 2 in $(-1, 0)$.

Serie numeriche e serie di funzioni

Una serie è la somma di infiniti termini. Si attribuisce un significato a questa somma studiando il limite delle somme di un numero finito di termini. Il capitolo raccoglie i criteri per stabilire se una serie converge, poi passa alle serie di funzioni, alle serie di potenze e al polinomio di Taylor.

Prime definizioni

Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali. La somma di tutti i suoi termini si indica con $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ oppure con $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ed è la **serie** di termine generale a_n . Per darle un senso si considerano le somme con un numero finito di addendi:

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i.$$

Il numero s_n è la **somma parziale** di posto n . Il comportamento di $\{s_n\}$ per $n \rightarrow \infty$ si chiama **carattere** della serie.

DEFINIZIONE

Carattere di una serie. Se $s_n \rightarrow s \in \mathbb{R}$ la serie **converge** e ha somma s : $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Se $s_n \rightarrow +\infty$ ($-\infty$) la serie **diverge** positivamente (negativamente). Se $\{s_n\}$ non ha limite la serie è **indeterminata** (o oscillante, o non regolare). Una serie convergente o divergente si dice regolare.

ESEMPIO

Tre serie elementari. Studiare il carattere della serie di termine generale $a_n = k$ (con $k \in \mathbb{R}$), di $\sum n$ e di $\sum (-1)^n$.

- 1 Serie costante $a_n = k$: $s_n = k n$. Se $k = 0$ la somma è 0 (converge); se $k > 0$ si ha $s_n \rightarrow +\infty$; se $k < 0$ si ha $s_n \rightarrow -\infty$.
- 2 Serie $\sum n$: la somma dei primi n interi vale $n(n+1)/2$, che tende a $+\infty$: la serie diverge positivamente.

$$s_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \rightarrow +\infty$$
- 3 Serie $\sum (-1)^n$: le somme parziali sono $-1, 0, -1, 0, \dots$ (zero se n è pari, -1 se è dispari). Non hanno limite.

$$s_n = 0 \quad (n \text{ pari}), \quad s_n = -1 \quad (n \text{ dispari})$$

RISULTATO

La prima converge solo per $k = 0$, la seconda diverge positivamente, la terza è indeterminata.

SERIE TELESCOPICA

Data una successione $\{x_n\}$, la serie $\sum (x_n - x_{n+1})$ è detta **telescopica**. Le somme parziali si semplificano a coppie:

$$s_n = (x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) + \dots + (x_n - x_{n+1}) = x_1 - x_{n+1}.$$

Dunque la serie converge e ha somma $x_1 - l$ se $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$; diverge se $x_n \rightarrow \pm\infty$; è indeterminata se x_n non ha limite.

ESEMPIO

Una serie telescopica. Calcolare $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n(n+1))$ e studiare $\sum \log(1 + 1/n)$.

- 1 Si scrive il termine come differenza, con $x_n = 1/n$.

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = x_n - x_{n+1}$$

- 2 Poiché $x_n \rightarrow 0$, la somma è $x_1 - 0 = 1$.

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1$$

- 3 Per la seconda: $\log(1 + 1/n) = \log((n+1)/n) = \log(n+1) - \log n$, quindi $x_n = -\log n$ e $s_n = \log(n+1) - \log 1 = \log(n+1)$.

$$s_n = \log(n+1) \rightarrow +\infty$$

RISULTATO

$\sum 1/(n(n+1)) = 1$ e $\sum \log(1 + 1/n)$ diverge positivamente.

SERIE GEOMETRICA

Per $x \in \mathbb{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \dots$ è la **serie geometrica** di ragione x . Per $x = 1$ i termini valgono 1 e la serie diverge positivamente. Per $x \neq 1$ si ha

$$s_n = 1 + x + \dots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}.$$

Per $n \rightarrow \infty$: $x^n \rightarrow +\infty$ se $x > 1$, $x^n \rightarrow 0$ se $-1 < x < 1$, e x^n non ha limite se $x \leq -1$. Quindi:

RAGIONE	CARATTERE DELLA SERIE GEOMETRICA
$x > 1$	diverge positivamente
$-1 < x < 1$	converge e ha somma $1/(1-x)$
$x \leq -1$	è indeterminata

Per esempio $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^{n-1} = 1/(1 - 1/2) = 2$.

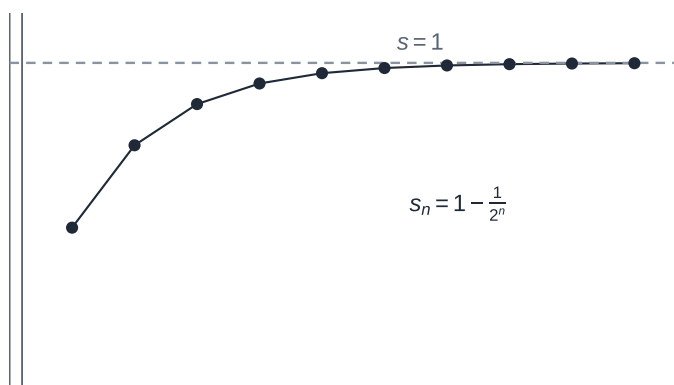


Figura 1. Somme parziali della serie geometrica di ragione $1/2$: crescono verso la somma 1 se si parte da $n = 1$ con il termine $1/2$.

SERIE ARMONICA

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ è la **serie armonica**, con $s_n = 1 + 1/2 + \dots + 1/n$. Non c'è una formula chiusa per s_n , ma si può mostrare che diverge. Poiché $e = \sup\{(1 + 1/k)^k\}$, per ogni $k \in \mathbb{N}$ vale $(1 + 1/k)^k < e$, quindi $k \log(1 + 1/k) < 1$, cioè

$$\log \frac{k+1}{k} < \frac{1}{k}.$$

Sommando questa disuguaglianza per $k = 1, 2, \dots, n$ i logaritmi si compongono (il prodotto dei rapporti si semplifica):

$$s_n > \log \frac{2}{1} + \log \frac{3}{2} + \dots + \log \frac{n+1}{n} = \log \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot \frac{n+1}{n} \right) = \log(n+1).$$

Poiché $\log(n+1) \rightarrow +\infty$, per confronto $s_n \rightarrow +\infty$: la serie armonica diverge positivamente, benché il termine generale $1/n$ tenda a zero.

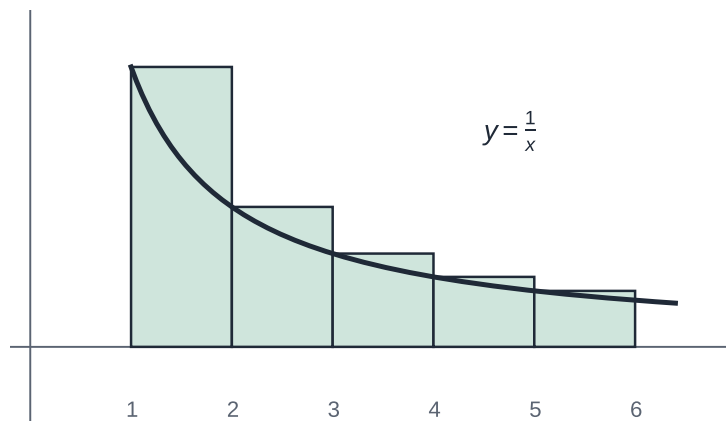


Figura 2. La somma dei rettangoli di altezza $1/k$ e base $[k, k+1]$ supera l'area sotto $y = 1/x$: è la stessa disuguaglianza $s_n > \log(n+1)$.

Risultati generali

DEFINIZIONE

Condizione necessaria di convergenza. Se $\sum a_n$ converge, allora $a_n \rightarrow 0$.

Dimostrazione. Per $n \geq 2$ vale $a_n = s_n - s_{n-1}$. Se $s_n \rightarrow s$ anche $s_{n-1} \rightarrow s$, e la differenza tende a 0.

DA RICORDARE

Attenzione. La condizione $a_n \rightarrow 0$ è solo necessaria. La serie armonica ha $1/n \rightarrow 0$ ma diverge. Se invece a_n non tende a zero, la serie non converge: è un modo veloce di escludere la convergenza.

DEFINIZIONE

Serie resto. Dato $p \in \mathbb{N}$, la serie $\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n$ ottenuta eliminando i primi p termini è il resto di posto p .

DEFINIZIONE

Resto e serie hanno lo stesso carattere. Una serie e tutti i suoi resti hanno lo stesso carattere. In caso di convergenza, $\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - (a_1 + \dots + a_p)$.

Dimostrazione. Se S_n è la somma parziale del resto, $S_n = a_{p+1} + \dots + a_{p+n} = s_{n+p} - s_p$. La successione $\{s_{n+p}\}$ è definitivamente uguale a $\{s_n\}$, quindi ha lo stesso comportamento al limite; s_p è un numero fisso.

Da qui segue che due serie che differiscono per un numero finito di termini hanno lo stesso carattere (hanno lo stesso resto da un certo posto in poi). Cambiare i primi termini cambia la somma, non la convergenza.

ESEMPIO

Il resto di una serie geometrica. Calcolare $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$.

- 1 È il resto di posto 1 della serie geometrica di ragione $1/2$, che converge a 2 e ha primo termine 1.
- 2 Si sottrae il primo termine.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} - 1 = 2 - 1 = 1$$

- 3 Alternativamente, per la proprietà di omogeneità seguente: $1/2^n = (1/2) \cdot 1/2^{n-1}$ e quindi la somma è $(1/2) \cdot 2 = 1$.

RISULTATO

La somma vale 1.

DEFINIZIONE

Omogeneità e somma. Sia $k \neq 0$. La serie $\sum k a_n$ è regolare se e solo se lo è $\sum a_n$; se $\sum a_n$ converge, $\sum k a_n = k \sum a_n$, mentre se diverge, $\sum k a_n$ diverge con lo stesso segno per $k > 0$ e con segno opposto per $k < 0$. Inoltre, se $\sum a_n = s$ e $\sum b_n = S$ convergono, $\sum (a_n + b_n) = s + S$; la serie somma diverge se una converge e l'altra diverge, o se entrambe divergono con lo stesso segno.

Dimostrazione. Le somme parziali di $\sum k a_n$ sono $k s_n$, e quelle della serie somma sono la somma delle somme parziali.

ESEMPIO

Serie geometrica con parametro. Studiare, al variare di $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, il carattere di $\sum_{n=2}^{\infty} ((2+x)/(1-x))^n$ e calcolare la somma nei casi di convergenza.

- 1 È una serie geometrica con ragione $q = (2+x)/(1-x)$, che parte da $n = 2$. Converge se e solo se $|q| < 1$, cioè $|2+x| < |1-x|$.
- 2 Si elevano al quadrato i due membri, entrambi non negativi: $4 + 4x + x^2 < 1 - 2x + x^2$, cioè $6x < -3$.

$$|2+x| < |1-x| \iff 4 + 4x < 1 - 2x \iff x < -\frac{1}{2}$$

- 3 Somma: la serie parte da $n = 2$, quindi $\sum_{n=2}^{\infty} q^n = q^2/(1-q)$. Si calcola $1-q = (1-x-2-x)/(1-x) = -(1+2x)/(1-x)$.

$$\sum_{n=2}^{\infty} q^n = \frac{q^2}{1-q} = \frac{(2+x)^2}{(1-x)^2} \cdot \frac{1-x}{-(1+2x)}$$

- 4 Semplificando.

$$\frac{(2+x)^2}{-(1-x)(1+2x)}$$

- 5 Per $x \geq -1/2$, con $x \neq 1$: se $-1/2 \leq x < 1$ si ha $q \geq 1$ e la serie diverge positivamente; se $x > 1$ si ha $q < -1$ e la serie è indeterminata.

RISULTATO

Converge se e solo se $x < -1/2$, con somma $-(2+x)^2 / ((1-x)(1+2x))$. Per $-1/2 \leq x < 1$ diverge positivamente, per $x > 1$ è indeterminata.

SERIE A TERMINI NON NEGATIVI

Per l'omogeneità, basta studiare serie con $a_n \geq 0$. Allora $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$: la successione delle somme parziali è crescente, quindi regolare. **Ogni serie a termini non negativi è regolare**: converge se e solo se $\{s_n\}$ è limitata superiormente (e la somma è $\sup s_n$), altrimenti diverge positivamente. I criteri seguenti confrontano la serie con altre note.

DEFINIZIONE

Criterio del confronto. Siano $\sum a_n$ e $\sum b_n$ a termini non negativi con $a_n \leq b_n$ per ogni n (o definitivamente). (i) Se $\sum b_n$ converge, converge $\sum a_n$. (ii) Se $\sum a_n$ diverge, diverge $\sum b_n$.

Dimostrazione. Le somme parziali verificano $s_n \leq S_n$. Se S_n è limitata anche s_n lo è; se $s_n \rightarrow +\infty$ anche $S_n \rightarrow +\infty$. In caso di convergenza $s \leq S$.

DEFINIZIONE

Criterio del confronto asintotico. Siano $\sum a_n$ e $\sum b_n$ a termini non negativi (con $b_n > 0$). (i) Se $\lim a_n/b_n = l > 0$ (cioè $a_n \sim b_n$) hanno lo stesso carattere. (ii) Se $\lim a_n/b_n = 0$ (cioè $a_n = o(b_n)$), dalla convergenza di $\sum b_n$ segue quella di $\sum a_n$, e dalla divergenza di $\sum a_n$ segue quella di $\sum b_n$.

Dimostrazione. (i) Definitivamente ($l/2$) $b_n \leq a_n \leq 2l b_n$: si applica il confronto due volte, insieme all'omogeneità. (ii) Definitivamente $a_n \leq b_n$, e si applica il confronto.

DEFINIZIONE

Criterio del rapporto. Sia $\sum a_n$ a termini positivi e $y_n = a_{n+1}/a_n$, con $y_n \rightarrow l$ (l finito o $+\infty$), $l \neq 1$. Se $l < 1$ la serie converge; se $l > 1$ diverge.

DIMOSTRAZIONE

$l > 1$. Definitivamente $y_n > 1$, cioè $a_{n+1} > a_n$: il termine generale cresce, quindi non tende a zero, e la serie diverge per la condizione necessaria.

$l < 1$. Si fissa $h \in]l, 1[$. Per $n > \alpha$ (da un certo punto in poi) $y_n < h$, cioè $a_{n+1} < h a_n$. Iterando: $a_{\alpha+1} < h a_\alpha$, $a_{\alpha+2} < h^2 a_\alpha$, e in generale $a_{\alpha+j} < h^j a_\alpha$. La serie è maggiorata dalla serie geometrica di ragione $h < 1$ (moltiplicata per a_α), che converge. Per il confronto converge.

DA RICORDARE

Quando non funziona. Se $l = 1$ il criterio non decide. Esempi: per $\sum 1/n$ (diverge) e per $\sum 1/n^2$ (converge) il rapporto tende a 1 in entrambi i casi.

DEFINIZIONE

Criterio della radice. Sia $\sum a_n$ a termini non negativi e $y_n = \sqrt[n]{a_n}$ (radice di indice n), con $y_n \rightarrow l$ (l finito o $+\infty$), $l \neq 1$. Se $l < 1$ la serie converge; se $l > 1$ diverge.

Dimostrazione. Se $l < 1$ si fissa $h \in]l, 1[$: definitivamente $\sqrt[n]{a_n} < h$, cioè $a_n < h^n$, e si confronta con la serie geometrica di ragione h . Se $l > 1$ definitivamente $\sqrt[n]{a_n} > 1$, quindi $a_n > 1$ e il termine generale non tende a zero.

ESEMPIO

Rapporto e radice. Studiare $\sum 3^n/n!$, $\sum n!/n^n$, $\sum n^n/(2^n n!)$ e $\sum ((n+1)/(3n+4))^n$.

- 1 $\sum 3^n/n!$. Il rapporto è $a_{n+1}/a_n = [3^{n+1}/(n+1)!] \cdot [n!/3^n] = 3/(n+1)$, che tende a $0 < 1$: converge.
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{n+1} \rightarrow 0$$
- 2 $\sum n!/n^n$. Il rapporto è $[(n+1)!/(n+1)^{n+1}] \cdot [n^n/n!] = (n+1) n^n/(n+1)^{n+1} = (n/(n+1))^n$, che tende a $1/e < 1$: converge.
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e}$$
- 3 $\sum n^n/(2^n n!)$. Il rapporto è $[(n+1)^{n+1}/(2^{n+1} (n+1)!)] \cdot [2^n n!/n^n] = (1/2)((n+1)/n)^n$, che tende a $e/2 \approx 1,36 > 1$: diverge.
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow \frac{e}{2} > 1$$
- 4 $\sum ((n+1)/(3n+4))^n$. Con la radice: $\sqrt[n]{a_n} = (n+1)/(3n+4) \rightarrow 1/3 < 1$: converge.
$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{n+1}{3n+4} \rightarrow \frac{1}{3}$$

RISULTATO

Convergono la prima, la seconda e la quarta; diverge la terza.

DEFINIZIONE

Criterio di Raabe. Sia $\sum a_n$ a termini positivi e $y_n = n(a_n/a_{n+1} - 1)$, con $y_n \rightarrow l$ (l finito o $\pm\infty$), $l \neq 1$. Se $l > 1$ la serie converge; se $l < 1$ diverge. (Enunciato senza dimostrazione.)

Si usa quando il rapporto tende a 1. Per la serie armonica generalizzata $\sum 1/n^x$ ($x \in \mathbb{R}$) si ha

$$y_n = n \left[\frac{(n+1)^x}{n^x} - 1 \right] = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x - 1}{\frac{1}{n}} \rightarrow x,$$

(è il limite notevole $((1+t)^x - 1)/t \rightarrow x$ per $t = 1/n \rightarrow 0$). Quindi $\sum 1/n^x$ converge per $x > 1$ e diverge per $x < 1$; per $x = 1$ è la serie armonica, che diverge. Dunque

DA RICORDARE

Serie armonica generalizzata. $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^x$ converge se e solo se $x > 1$.

ESEMPIO

Raabe quando il rapporto non basta. Studiare $\sum 1/(n(n+1))$ con il criterio di Raabe.

- 1 Il rapporto $a_{n+1}/a_n = n/(n+2) \rightarrow 1$: il criterio del rapporto non decide.
$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)} = \frac{n+2}{n}$$

- 2 Si applica Raabe: $y_n = n((n+2)/n - 1) = n \cdot 2/n = 2 > 1$.

$$y_n = n\left(\frac{n+2}{n} - 1\right) = 2 > 1$$

RISULTATO

La serie converge (ed è la serie telescopica già calcolata, di somma 1).

DEFINIZIONE

Criterio dell'ordine di infinitesimo. Sia $\sum a_n$ a termini positivi e sia $x \in \mathbb{R}$ con $\lim n^x a_n = l \in]0, +\infty[$. Allora la serie converge se $x > 1$ e diverge se $x \leq 1$.

Dimostrazione. Da $n^x a_n \rightarrow l > 0$ segue $a_n / (1/n^x) \rightarrow l > 0$, cioè $a_n \sim 1/n^x$. Per il confronto asintotico $\sum a_n$ ha lo stesso carattere della serie armonica generalizzata di esponente x , che converge se e solo se $x > 1$. L'esponente x è l'**ordine di infinitesimo** di a_n rispetto a $1/n$. Il criterio è comodo quando $a_n \rightarrow 0$.

ESEMPIO

Ordine di infinitesimo. Studiare $\sum (n+1)/(n^3+2)$, $\sum (1 - \cos(1/n))$, $\sum 1/\sqrt[n]{n(n+2)}$ e $\sum (\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n})$.

- 1 $(n+1)/(n^3+2)$. Moltiplicando per n^2 : $(n^3 + n^2) / (n^3 + 2) \rightarrow 1$. Ordine $x = 2 > 1$: converge.

$$n^2 \cdot \frac{n+1}{n^3+2} = \frac{n^3+n^2}{n^3+2} \rightarrow 1$$

- 2 $1 - \cos(1/n)$. Con il limite notevole $1 - \cos t \sim t^2/2$ per $t = 1/n$ si ha $n^2 (1 - \cos(1/n)) \rightarrow 1/2$. Ordine $x = 2$: converge.

$$n^2 \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) \rightarrow \frac{1}{2}$$

- 3 $1/\sqrt[n]{n(n+2)}$. $n \cdot 1/\sqrt[n]{n^2+2n} = 1/\sqrt[n]{1+2/n} \rightarrow 1$. Ordine $x = 1$: diverge.

$$n \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n^2+2n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{1+\frac{2}{n}}} \rightarrow 1$$

- 4 $\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$. Si razionalizza: $\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n} = 1/(\sqrt[n]{n+1} + \sqrt[n]{n})$. Allora $\sqrt[n]{n} \cdot a_n = \sqrt[n]{n} / (\sqrt[n]{n+1} + \sqrt[n]{n}) \rightarrow 1/2$. Ordine $x = 1/2 \leq 1$: diverge.

$$\sqrt[n]{n} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n+1} + \sqrt[n]{n}} \rightarrow \frac{1}{2}$$

RISULTATO

Convergono le prime due; divergono le ultime due.

ESEMPIO

Confronto semplice. Studiare $\sum_{n=2}^{\infty} 1/\log n$ e $\sum 1/(2^n + n)$.

- 1 Per $n \geq 2$ vale $\log n < n$, quindi $1/\log n > 1/n$. La serie armonica diverge: per confronto diverge anche $\sum 1/\log n$.

2

Si ha $2^n + n > 2^n$ quindi $1/(2^n + n) < 1/2^n$. La serie geometrica di ragione $1/2$ converge: converge anche $\sum 1/(2^n + n)$.

RISULTATO

La prima diverge, la seconda converge.

DA RICORDARE

Errori tipici. Per $a_n > 0$: se $a_n \rightarrow +\infty$ non è detto che $\sum 1/a_n$ converga ($a_n = n$ dà la serie armonica). Se $a_n \rightarrow 0$ allora $1/a_n \rightarrow +\infty$ e $\sum 1/a_n$ diverge. Se $\sum 1/a_n$ converge, allora $1/a_n \rightarrow 0$, cioè $a_n \rightarrow +\infty$. Se $\sum 1/a_n$ diverge non è detto che $a_n \rightarrow 0$ (ancora $a_n = n$). Infine $a_n \rightarrow S$ non significa che $\sum a_n$ converga a S : la somma di una serie non è il limite del termine generale.

SERIE ASSOLUTAMENTE CONVERGENTI

DEFINIZIONE

Convergenza assoluta. La serie $\sum a_n$ è assolutamente convergente se converge la serie dei valori assoluti $\sum |a_n|$, che è a termini non negativi.

DEFINIZIONE

Convergenza assoluta implica convergenza. Una serie assolutamente convergente è convergente.

Dimostrazione. Si scrive $a_n = b_n - c_n$ con $b_n = (|a_n| + a_n)/2$ e $c_n = (|a_n| - a_n)/2$. Verifica: $b_n - c_n = (2a_n)/2 = a_n$. Si ha $0 \leq b_n \leq |a_n|$ e $0 \leq c_n \leq |a_n|$, quindi per confronto $\sum b_n$ e $\sum c_n$ convergono. La serie $\sum a_n$ è la differenza di due serie convergenti, quindi converge.

ESEMPIO

La serie esponenziale. Studiare $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ al variare di $x \in \mathbb{R}$.

1

Per $x = 0$ tutti i termini con $n \geq 1$ sono nulli: converge, con somma 1.

2

Per $x > 0$ si usa il rapporto: $a_{n+1}/a_n = [x^{n+1}/(n+1)!] \cdot [n!/x^n] = x/(n+1) \rightarrow 0 < 1$: converge.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x}{n+1} \rightarrow 0$$

3

Per $x < 0$ la serie dei valori assoluti è $\sum |x|^n/n!$, cioè il caso precedente con $|x| > 0$: converge. Quindi la serie converge assolutamente, dunque converge.

RISULTATO

La serie esponenziale converge per ogni $x \in \mathbb{R}$.

SERIE A SEGNI ALTERNI

Data $\{a_n\}$ di numeri positivi, la serie $\sum (-1)^{n+1} a_n$ ha termini di segno alterno: i termini di posto dispari sono positivi, quelli di posto pari negativi (o il contrario con $(-1)^n$).

DEFINIZIONE

Lemma. Se $\{a_n\}$ è monotona, la serie a segni alterni non può divergere.

Dimostrazione (caso $\{a_n\}$ decrescente). Per le somme parziali di posto pari: $s_{2n+2} = s_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n+2}) > s_{2n}$, perché $a_{2n+1} > a_{2n+2}$. Quindi $\{s_{2n}\}$ è crescente e non può tendere a $-\infty$. Analogamente $\{s_{2n-1}\}$ è decrescente (si ha $s_{2n+1} = s_{2n-1} - (a_{2n} - a_{2n+1}) < s_{2n-1}$) e non può tendere a $+\infty$. Le somme parziali non possono quindi divergere. Se $\{a_n\}$ è crescente il ragionamento è analogo.

DEFINIZIONE

Criterio di Leibniz. Se $\{a_n\}$ è decrescente e tende a 0, la serie $\sum (-1)^{n+1} a_n$ converge e, detta s la somma, per ogni n si ha $|s - s_n| \leq a_{n+1}$.

DIMOSTRAZIONE

Per il lemma la serie non diverge. Resta da provare che $\{s_{2n}\}$ e $\{s_{2n-1}\}$ hanno lo stesso limite. La successione $\{s_{2n-1}\}$ è decrescente e a termini non negativi, perché $s_{2n-1} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-3} - a_{2n-2}) + a_{2n-1}$ è somma di quantità non negative: quindi ha limite finito $s = \inf s_{2n-1}$. Poiché $s_{2n} = s_{2n-1} - a_{2n}$ e $a_{2n} \rightarrow 0$, anche $s_{2n} \rightarrow s$. La serie converge a s , e $s = \sup s_{2n}$ perché $\{s_{2n}\}$ è crescente.

Stima dell'errore. Se n è pari, $s_n \leq s$ e la tesi $s - s_n \leq a_{n+1}$ equivale a $s \leq s_{n+1}$, vera perché $n+1$ è dispari. Se n è dispari, $s \leq s_n$ e la tesi $s_n - s \leq a_{n+1}$ equivale a $s \geq s_{n+1}$, vera perché $n+1$ è pari.

DEFINIZIONE

Criterio di non regolarità. Se $\{a_n\}$ è crescente con almeno un termine positivo, oppure è decrescente e non tende a 0, la serie a segni alterni è indeterminata.

Dimostrazione. In entrambi i casi il termine generale non tende a zero, quindi la serie non converge (condizione necessaria), e per il lemma non diverge.

ESEMPIO

Serie a segni alterni. Studiare $\sum (-1)^n/n$, $\sum (-1)^{n+1}/n^2$ (e quanti termini servono per un errore minore di 10^{-2}) e $\sum (-1)^n n/(n+1)$.

- 1 $\sum (-1)^n/n$ (serie armonica alternata): $a_n = 1/n$ è decrescente e tende a 0, quindi per Leibniz converge. Non converge assolutamente, perché la serie dei valori assoluti è la serie armonica: quindi **il viceversa della convergenza assoluta è falso**.
- 2 $\sum (-1)^{n+1}/n^2$: converge anche assolutamente ($x = 2 > 1$). Per la stima dell'errore, $|s - s_n| \leq 1/(n+1)^2 < 10^{-2}$ se $n+1 \geq 10$, cioè $n \geq 9$.

$$|s - s_9| \leq \frac{1}{10^2} = 0,01$$
- 3 $\sum (-1)^n n/(n+1)$: $a_n = n/(n+1)$ è crescente e positiva (tende a 1): per il criterio di non regolarità la serie è indeterminata.

RISULTATO

La prima converge non assolutamente; la seconda converge (assolutamente) e s_9 approssima s con errore al più 0,01; la terza è indeterminata.

ESEMPIO

Serie con parametro: la serie logaritmica. Studiare $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$ al variare di $x \in \mathbb{R}$.

- 1 Per $x = 0$ converge, con somma 0.

- 2 Per $x > 0$ si usa il rapporto: $a_{n+1}/a_n = [x^{n+1}/(n+1)] \cdot [n/x^n] = x n/(n+1) \rightarrow x$. Converge per $0 < x < 1$, diverge per $x > 1$. Per $x = 1$ è la serie armonica: diverge.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = x \frac{n}{n+1} \rightarrow x$$

- 3 Per $x < 0$ la serie dei valori assoluti è $\sum |x|^n/n$: converge per $-1 < x < 0$, quindi la serie converge assolutamente.
- 4 Per $x = -1$ è la serie armonica alternata: converge (non assolutamente).
- 5 Per $x < -1$ il termine generale ha valore assoluto $|x|^n/n \rightarrow +\infty$: non tende a zero, la serie non converge (è indeterminata, perché a segni alterni).

RISULTATO

La serie converge se e solo se $-1 \leq x < 1$.

ESEMPIO

Serie con parametro: un altro caso. Studiare $\sum_{n=1}^{\infty} (2x)^n/(n+2)$.

- 1 Per $x = 0$ converge. Per $x > 0$ si usa il rapporto: $a_{n+1}/a_n = 2x (n+2)/(n+3) \rightarrow 2x$. Converge se $2x < 1$, cioè $0 < x < 1/2$; diverge se $x > 1/2$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2x \frac{n+2}{n+3} \rightarrow 2x$$

- 2 Per $x = 1/2$: $a_n = 1/(n+2)$, che è un resto della serie armonica: diverge.
- 3 Per $x < 0$ il termine è $(-1)^n |2x|^n/(n+2)$: se $-1/2 < x < 0$ converge assolutamente (come sopra con $|x|$). Per $x = -1/2$ è $(-1)^n/(n+2)$, un resto della serie armonica alternata: converge non assolutamente.
- 4 Per $x < -1/2$ si ha $|2x| > 1$ e $|2x|^n/(n+2) \rightarrow +\infty$: il termine non tende a zero, la serie non converge.

RISULTATO

La serie converge se e solo se $-1/2 \leq x < 1/2$.

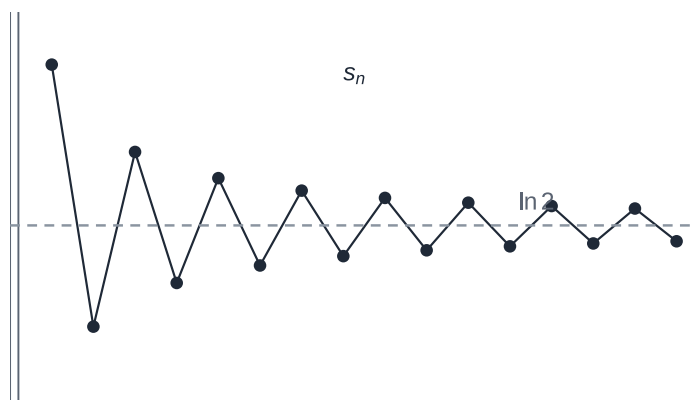


Figura 3. Le somme parziali della serie armonica alternata oscillano intorno alla somma $\log 2$, restando ora sopra ora sotto (stima di Leibniz).

PROPRIETÀ COMMUTATIVA

Se $j: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ è una corrispondenza biunivoca e $b_n = a_{j(n)}$, la serie $\sum b_n$ è un **riordinamento** di $\sum a_n$: stessi termini, posti diversi. Una serie gode della **proprietà commutativa** se tutti i suoi riordinamenti hanno lo stesso carattere e, se convergono, la stessa somma.

DEFINIZIONE

Commutatività per serie a termini non negativi. Una serie a termini non negativi gode della proprietà commutativa.

Dimostrazione. Siano s_n e S_n le somme parziali della serie e del riordinamento, e sia $\sum a_n = s$ convergente. Per ogni n , posto $p = \max\{j(1), \dots, j(n)\}$: $S_n = a_{j(1)} + \dots + a_{j(n)} \leq s_p \leq s$. Le somme parziali del riordinamento sono limitate, quindi converge e $S \leq s$. La serie di partenza è a sua volta un riordinamento del riordinamento, quindi $s \leq S$: le somme coincidono. Se $\sum a_n$ diverge, anche il riordinamento diverge, altrimenti per quanto appena visto convergerebbe anche la prima.

Più in generale ogni serie assolutamente convergente gode della proprietà commutativa (non dimostrato), ed è l'unica classe di serie convergenti con questa proprietà: una serie convergente ma non assolutamente, come l'armonica alternata, può cambiare somma, o anche diventare divergente, se si riordinano i termini.

Cenni sulle serie di funzioni

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $f_n : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. La **serie di funzioni** $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ si studia con due nozioni di convergenza.

DEFINIZIONE

Convergenza puntuale e totale. (i) La serie converge in $\bar{x} \in (a, b)$ se $\sum f_n(\bar{x})$ converge; se ciò vale per ogni $x \in (a, b)$, la serie converge puntualmente e la funzione $f(x) = \sum f_n(x)$ è la **funzione somma**. (ii) La serie converge **totalmente** in (a, b) se esiste una serie numerica convergente a termini non negativi $\sum M_n$ con $|f_n(x)| \leq M_n$ per ogni $x \in (a, b)$ e ogni n .

La convergenza totale implica la puntuale: fissato $\bar{x}$, la serie $\sum |f_n(\bar{x})|$ è maggiorata da $\sum M_n$, quindi converge per confronto, e la serie converge assolutamente.

ESEMPIO

Convergenza totale. Mostrare che $\sum \sin(nx)/n^2$ converge totalmente in $\mathbb{R}$.

- 1 Per ogni x e n , $|\sin(nx)| \leq 1$, quindi $|\sin(nx)/n^2| \leq 1/n^2 = M_n$.
$$\left| \frac{\sin(nx)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$
- 2 $\sum 1/n^2$ converge (serie armonica generalizzata con $x = 2 > 1$).

RISULTATO

La serie converge totalmente (e quindi puntualmente) in $\mathbb{R}$.

DEFINIZIONE

Teorema di derivazione per serie. Sia $\sum f_n(x)$ una serie di funzioni derivabili in un intervallo limitato (a, b) tale che (i) converge in almeno un punto $\bar{x} \in (a, b)$ e (ii) la serie delle derivate $\sum f_n'(x)$ converge totalmente in (a, b) . Allora la serie data converge totalmente in (a, b) e la sua funzione somma f è derivabile, con $f'(x) = \sum f_n'(x)$ per ogni $x \in (a, b)$. (Enunciato senza dimostrazione.)

Il teorema permette di derivare la somma termine a termine. Per esempio, la serie $\sum \sin(nx)/n^3$ converge in ogni punto (confronto con $1/n^3$) e la serie delle derivate $\sum \cos(nx)/n^2$ converge totalmente in $\mathbb{R}$; quindi in ogni intervallo limitato la somma è derivabile e $f'(x) = \sum \cos(nx)/n^2$.

SERIE DI POTENZE

DEFINIZIONE

Serie di potenze. Si chiama serie di potenze di centro $c \in \mathbb{R}$ la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n$, dove a_n sono i coefficienti.

Si può dimostrare che per ogni serie di potenze si verifica una e una sola delle situazioni seguenti:

- esiste $r > 0$ tale che la serie converge puntualmente (anche assolutamente) in $]c - r, c + r[$, non converge fuori da $[c - r, c + r]$ e converge totalmente in ogni intervallo chiuso e limitato contenuto in $]c - r, c + r[$;
- la serie converge solo in $x = c$ (raggio $r = 0$);
- la serie converge in tutto $\mathbb{R}$ e totalmente in ogni intervallo chiuso e limitato (raggio $r = +\infty$).

Il numero r è il **raggio di convergenza** e $]c - r, c + r[$ l'**intervallo di convergenza**. Agli estremi $c \pm r$ la serie può convergere o no: va studiata caso per caso con i criteri sulle serie numeriche.

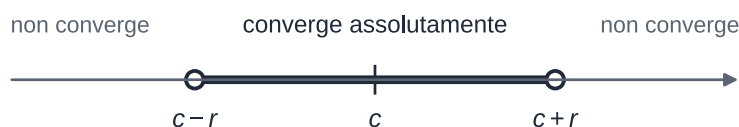


Figura 4. Intervallo di convergenza di una serie di potenze di centro c e raggio r .

DA RICORDARE

Calcolo del raggio. Se esiste $L = \lim |a_{n+1}/a_n|$ (oppure $L = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$), allora $r = 1/L$, con la convenzione $1/0 = +\infty$ e $1/(+\infty) = 0$. Infatti, applicando il criterio del rapporto alla serie dei valori assoluti, il rapporto dei termini tende a $L|x - c|$: converge se $L|x - c| < 1$, cioè $|x - c| < 1/L$, e se $L|x - c| > 1$ il termine generale non tende a zero.

ESEMPIO

Raggio e intervallo di convergenza. Trovare raggio e intervallo di convergenza di $\sum x^n/n^2$, $\sum n! x^n$, $\sum x^n/n!$ e $\sum (x-2)^n/(n 3^n)$ ($n \geq 1$), e il comportamento agli estremi.

- 1 $\sum x^n/n^2$: $|a_{n+1}/a_n| = n^2/(n+1)^2 \rightarrow 1$, quindi $r = 1$. In $x = \pm 1$ la serie dei valori assoluti è $\sum 1/n^2$, che converge. Converge in $[-1, 1]$.

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n^2}{(n+1)^2} \rightarrow 1$$

- 2 $\sum n! x^n$: $|a_{n+1}/a_n| = n + 1 \rightarrow +\infty$, quindi $r = 0$: converge solo in $x = 0$.

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = n + 1 \rightarrow +\infty$$

- 3 $\sum x^n/n!$: $|a_{n+1}/a_n| = 1/(n+1) \rightarrow 0$, quindi $r = +\infty$: converge in tutto $\mathbb{R}$.

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

- 4 $\sum (x - 2)^n/(n 3^n)$: centro $c = 2$ e $|a_{n+1}/a_n| = n 3^n / ((n+1) 3^{n+1}) \rightarrow 1/3$, quindi $r = 3$ e l'intervallo di convergenza è $]-1, 5[$.

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n}{3(n+1)} \rightarrow \frac{1}{3} \implies r = 3$$

5

Agli estremi. In $x = 5$: $(x - 2)^n/3^n = 1$, la serie diventa $\sum 1/n$, che diverge. In $x = -1$: $(-3)^n/(n 3^n) = (-1)^n/n$, la serie armonica alternata, che converge.

$$x = 5: \sum \frac{1}{n} \text{ diverge}; \quad x = -1: \sum \frac{(-1)^n}{n} \text{ converge}$$

RISULTATO

Intervalli di convergenza: $[-1, 1]$, il solo punto 0 , $\mathbb{R}$ e $[-1, 5[$.

DERIVAZIONE E COEFFICIENTI

Osservazione. La serie delle derivate $\sum n a_n (x - c)^{n-1}$ è ancora una serie di potenze e (si può dimostrare) ha lo stesso raggio di convergenza. Dunque, in ogni intervallo $[a, b]$ chiuso e limitato contenuto nell'intervallo di convergenza, la serie delle derivate converge totalmente e si può applicare il teorema di derivazione: la funzione somma f è derivabile e si può derivare termine a termine, a ogni ordine.

ESEMPIO

Derivare la serie geometrica. Calcolare $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ per $|x| < 1$.

1

La serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ha raggio $r = 1$ e somma $f(x) = 1/(1 - x)$ per $|x| < 1$.

2

Si deriva termine a termine: la serie delle derivate $\sum n x^{n-1}$ ha lo stesso raggio, quindi la somma è la derivata di f .

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

RISULTATO

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = 1/(1-x)^2 \text{ per } |x| < 1.$$

Sia $f(x) = \sum a_n (x - c)^n$ con raggio non nullo. Calcolando in $x = c$ si ha $f(c) = a_0$. Derivando termine a termine,

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - c) + 3a_3(x - c)^2 + \dots, \quad f''(x) = 2a_2 + 6a_3(x - c) + \dots$$

e in $x = c$ si ottiene $f'(c) = a_1$, $f''(c) = 2a_2$, e in generale $f^{(n)}(c) = n! a_n$. Dunque i coefficienti sono determinati dalle derivate della funzione somma:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - c)^n.$$

DEFINIZIONE

Serie di Taylor. Sia $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile infinite volte e $c \in (a, b)$. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(c)/n! (x - c)^n$ è la **serie di Taylor** di f di centro c (di Maclaurin se $c = 0$). Se in x_0 converge e ha somma $f(x_0)$, f si dice sviluppabile in serie di Taylor in x_0 .

Le somme parziali sono i polinomi di Taylor $T_n(x) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(c)/k! (x - c)^k$, che approssimano f vicino a c .

ESEMPIO

La serie esponenziale ha somma e^x . Mostrare che $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n! = e^x$ per ogni x .

1

La serie converge in tutto $\mathbb{R}$ (raggio $+\infty$). Sia f la funzione somma: $f(x) = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \dots$

- 2 Si deriva termine a termine: si ottiene la serie stessa, quindi $f'(x) = f(x)$.

$$f'(x) = 0 + 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots = f(x)$$

- 3 Inoltre $f(0) = 1$. Dunque f risolve il problema di Cauchy $y' = y$, $y(0) = 1$.

- 4 Per quanto visto nelle equazioni differenziali, questo problema (lineare omogeneo del primo ordine, con integrale generale $k e^x$) ha come unica soluzione $y = e^x$, quindi $f(x) = e^x$.

$$f(x) = e^x$$

- 5 In particolare per $x = 1$: $e = \sum_{n=0}^{\infty} 1/n! = 1 + 1 + 1/2 + 1/6 + \dots$

RISULTATO

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed $e = \sum 1/n!$.

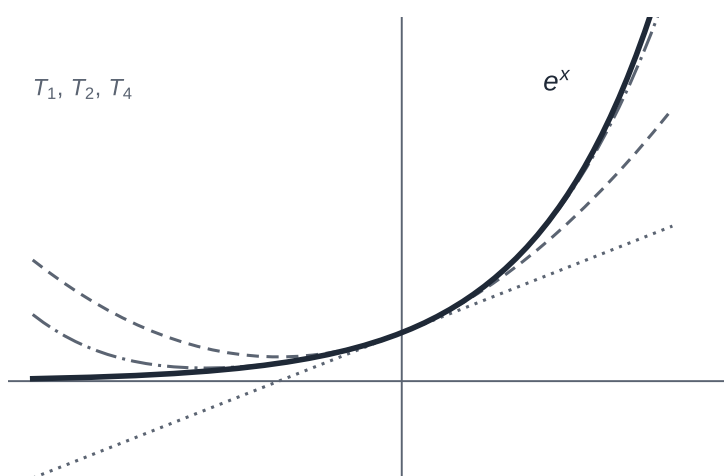


Figura 5. La funzione e^x (linea piena) e i suoi polinomi di Taylor di centro 0 di grado 1, 2, 4 (tratteggiati): più il grado è alto, migliore è l'approssimazione vicino a 0.

ESEMPIO

Seno e coseno con la stessa idea. Mostrare che $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)!$ coincide con $\sin x$.

- 1 Il rapporto dei termini $|a_{n+1}/a_n| = x^2/((2n+2)(2n+3)) \rightarrow 0$: la serie converge in tutto $\mathbb{R}$ e si può derivare termine a termine.

- 2 Prima derivata: i termini $x^{2n+1}/(2n+1)!$ danno $x^{2n}/(2n)!$.

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

- 3 Seconda derivata: il termine $n = 0$ è costante e sparisce, per $n \geq 1$ si ottiene $x^{2n-1}/(2n-1)!$. Con $m = n - 1$:

$$S''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = - \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} = -S(x)$$

- 4 Quindi S risolve $y'' + y = 0$, con $S(0) = 0$ e $S'(0) = 1$. L'integrale generale è $k_1 \cos x + k_2 \sin x$ (si veda il capitolo sulle equazioni differenziali): le condizioni iniziali danno $k_1 = 0$ e $k_2 = 1$.

RISULTATO

$\sin x = \sum (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)!$. Derivando si ottiene $\cos x = \sum (-1)^n x^{2n}/(2n)!$.