



NoiStudiamo

DISPENSA DI TEORIA

Algebra Lineare e Geometria

Spazi vettoriali, matrici, applicazioni lineari e diagonalizzazione,
geometria analitica del piano e dello spazio, coniche e quadriche.

A CURA DI

Gabriele Fontanarosa

Ottobre 2026

Indice dei capitoli

I capitoli della dispensa, con il numero della pagina in cui iniziano.

1. Preliminari e strutture algebriche	3
2. Spazi vettoriali	4
3. Applicazioni lineari	10
4. Matrici e sistemi lineari	16
5. Determinanti	20
6. Autovalori e diagonalizzazione	24
7. Prodotto scalare e ortogonalità	28
8. Calcolo vettoriale e geometria affine	31
9. Geometria lineare nel piano	34
10. Geometria lineare nello spazio	36
11. Isometrie	40
12. Coniche	43
13. Quadriche	49
14. Formulario riassuntivo	52

Preliminari e strutture algebriche

Insiemi, funzioni e strutture algebriche, fino alla nozione di campo.

1.1 Insiemi e funzioni

DEFINIZIONE

Insieme

Un **insieme** è una collezione di elementi, tutti distinti, per cui è possibile decidere se un elemento vi appartiene o no. Si scrive $a \in A$ se a appartiene ad A , $A \subseteq B$ se ogni elemento di A appartiene a B (sottoinsieme). Si descrive per elencazione $A = \{a, b, c\}$ o per proprietà caratteristica $A = \{x \in X \mid p(x)\}$.

Operazioni: unione $A \cup B$, intersezione $A \cap B$, differenza $A \setminus B$, prodotto cartesiano $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$. L'insieme vuoto è $\emptyset$; l'**insieme delle parti** $P(A)$ ha $2^{|A|}$ elementi se A è finito. Una **partizione** di X è una famiglia di sottoinsiemi non vuoti, a due a due disgiunti, la cui unione è X .

DEFINIZIONE

Funzione

Dati due insiemi A e B , una **funzione** $f: A \rightarrow B$ è una legge che associa a ogni $a \in A$ uno e un solo elemento $f(a) \in B$. Si dice **iniettiva** se $f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$; **suriettiva** se ogni $b \in B$ è immagine di almeno un $a \in A$; **biettiva** se è iniettiva e suriettiva (e allora esiste la funzione inversa $f^{-1}: B \rightarrow A$).

Una **relazione di equivalenza** su X è una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva: essa induce una partizione di X in classi di equivalenza. Un esempio che incontreremo è la *similitudine* tra matrici (§5).

1.2 Gruppi, anelli, campi

DEFINIZIONE

Gruppo

Un **gruppo** $(G, *)$ è un insieme con un'operazione $*$ tale che: (i) $*$ è associativa; (ii) esiste l'elemento neutro e ($a * e = e * a = a$); (iii) ogni elemento ha un inverso ($a * a' = a' * a = e$). Se vale anche la commutatività il gruppo si dice **abeliano**.

DEFINIZIONE

Anello e campo

Un **anello** $(A, +, \cdot)$ è un insieme con due operazioni tali che $(A, +)$ è un gruppo abeliano, il prodotto è associativo e vale la distributività $a(b + c) = ab + ac$, $(a + b)c = ac + bc$. È **commutativo** se il prodotto è commutativo, **unitario** se esiste l'elemento neutro del prodotto (1). Un anello commutativo unitario in cui ogni elemento diverso da 0 ha inverso moltiplicativo si dice **campo**.

ESEMPIO

$(\mathbb{Z}, +)$ è un gruppo abeliano; $\mathbb{Z}$ è un anello commutativo unitario ma non un campo; $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sono campi; le matrici quadrate di ordine $n \geq 2$ formano un anello unitario non commutativo.

In tutta la dispensa $\mathbb{K}$ indica un campo, in pratica $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Spazi vettoriali

Definizione di spazio vettoriale e dei suoi sottospazi, basi, dimensione e modi di descrivere un sottospazio.

2.1 Campi e spazi vettoriali

DEFINIZIONE

Spazio vettoriale

Sia $\mathbb{K}$ un campo. Uno **spazio vettoriale su $\mathbb{K}$** è un insieme V (i cui elementi si chiamano **vettori**) dotato di due operazioni:

- la **somma** $+: V \times V \rightarrow V$, rispetto alla quale $(V, +)$ è un gruppo abeliano (elemento neutro: il vettore nullo $\mathbf{0}$);
- il **prodotto esterno** (per scalari) $\cdot: \mathbb{K} \times V \rightarrow V$,

che soddisfano, per ogni $a, b \in \mathbb{K}$ e $v, w \in V$:

1. $(ab)v = a(bv)$ (associatività mista);
2. $1 \cdot v = v$;
3. $(a+b)v = av + bv$ (distributività rispetto alla somma di scalari);
4. $a(v+w) = av + aw$ (distributività rispetto alla somma di vettori).

Conseguenze immediate (si dimostrano dagli assiomi): $0 \cdot v = \mathbf{0}$; $a \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$; $(-1)v = -v$; $av = \mathbf{0} \Leftrightarrow a = 0$ oppure $v = \mathbf{0}$.

Dimostrazione. $0 \cdot v = (0 + 0)v = 0 \cdot v + 0 \cdot v$; sommando $-(0 \cdot v)$ a entrambi i membri si ottiene $\mathbf{0} = 0 \cdot v$. Analogamente $a\mathbf{0} = a(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = a\mathbf{0} + a\mathbf{0} \Rightarrow a\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Inoltre $v + (-1)v = (1 - 1)v = 0 \cdot v = \mathbf{0}$, quindi $(-1)v = -v$. Se $av = \mathbf{0}$ e $a \neq 0$, moltiplicando per a^{-1} si ha $v = a^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

2.2 Esempi fondamentali

ESEMPIO

1. $\mathbb{K}^n$: le liste di n componenti $(x_1, \dots, x_n)$ con somma e prodotto per scalare componente per componente. $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ sono il piano e lo spazio. Il vettore nullo è $(0, \dots, 0)$.
2. $\mathbb{K}^{m,n}$: le matrici $m \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$ con somma elemento per elemento e prodotto $h \cdot A = (h a_{ij})$. Ha dimensione mn .
3. $\mathbb{K}[x]_{\leq n}$: i polinomi di grado $\leq n$ (compreso il polinomio nullo) in un'indeterminata: ha dimensione $n + 1$, base $1, x, \dots, x^n$. L'insieme di *tutti* i polinomi $\mathbb{K}[x]$ è uno spazio vettoriale di dimensione infinita.
4. **Funzioni**: l'insieme $F(X, \mathbb{K})$ delle funzioni $X \rightarrow \mathbb{K}$ con somma e prodotto per scalare puntuali. Le funzioni continue $C^0([a, b])$ ne sono un sottospazio.
5. $\mathbb{C}$ **come spazio su $\mathbb{R}$** ha dimensione 2 (base $1, i$); come spazio su $\mathbb{C}$ ha dimensione 1.
6. **Lo spazio nullo $\{\mathbf{0}\}$** , di dimensione 0.

ATTENZIONE

Un sottoinsieme non è automaticamente uno spazio vettoriale: ad esempio $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$ non contiene l'origine, quindi non è chiuso rispetto alla somma né al prodotto per scalari.

2.3 Sottospazi, somma e somma diretta

DEFINIZIONE

Sottospazio

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Un sottoinsieme $W \subseteq V$ è un **sottospazio** (si scrive $W \leq V$) se W è esso stesso uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ rispetto alle operazioni di V .

TEOREMA

Criterio di sottospazio

$W \subseteq V$ è un sottospazio se e solo se: (a) $\mathbf{0} \in W$ (equivalentemente $W \neq \emptyset$); (b) $w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1 + w_2 \in W$ (chiuso rispetto alla somma); (c) $a \in \mathbb{K}, w \in W \Rightarrow aw \in W$ (chiuso rispetto al prodotto esterno).

Equivalentemente: $aw_1 + bw_2 \in W$ per ogni $a, b \in \mathbb{K}, w_1, w_2 \in W$.

ESEMPIO

In $\mathbb{R}^3$, $W = \{(x, y, z) \mid x - y - z = 0\}$ è un sottospazio (piano per l'origine); $\{(x, y, z) \mid x = y - z = 0\}$ è un sottospazio (retta); $\{(x, y, z) \mid x \geq 0\}$ non lo è (non chiuso rispetto al prodotto per -1). Le **soluzioni di un sistema lineare omogeneo** in n incognite formano sempre un sottospazio di $\mathbb{K}^n$.

Operazioni tra sottospazi. Siano $W_1, W_2 \leq V$.

- **Intersezione:** $W_1 \cap W_2$ è sempre un sottospazio.
- **Unione:** $W_1 \cup W_2$ è un sottospazio se e solo se $W_1 \subseteq W_2$ oppure $W_2 \subseteq W_1$. (Ad esempio due rette distinte per l'origine in $\mathbb{R}^2$ hanno unione che non è chiusa rispetto alla somma.)
- **Somma:** $W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$ è il più piccolo sottospazio che contiene $W_1 \cup W_2$.

DEFINIZIONE

Somma diretta

$W_1 + W_2$ si dice **somma diretta**, e si scrive $W_1 \oplus W_2$, se ogni vettore di $W_1 + W_2$ si scrive in **modo unico** come $w_1 + w_2$ con $w_i \in W_i$. Se inoltre $W_1 \oplus W_2 = V$ i due sottospazi si dicono **supplementari**.

TEOREMA

La somma $W_1 + W_2$ è diretta $\Leftrightarrow W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$.

Dimostrazione. $(\Rightarrow)$ Se $v \in W_1 \cap W_2$, allora $v = v + \mathbf{0} = \mathbf{0} + v$ sono due scritture di v come somma di un elemento di W_1 e uno di W_2 ; per l'unicità $v = \mathbf{0}$. $(\Leftarrow)$ Se $w_1 + w_2 = w_1' + w_2'$, allora $w_1 - w_1' = w_2' - w_2$ sta in $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$, quindi $w_1 = w_1'$ e $w_2 = w_2'$.

2.4 Combinazioni lineari, generatori

DEFINIZIONE

Combinazione lineare

Un vettore v è **combinazione lineare** (C.L.) di $v_1, \dots, v_n \in V$ se esistono $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ con $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$. L'insieme di tutte le C.L. di $v_1, \dots, v_n$ si chiama **span** (o sottospazio generato) e si indica $\text{Span}(v_1, \dots, v_n)$ oppure $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$: è un sottospazio, il più piccolo che contiene i v_i .

DEFINIZIONE

Sistema di generatori

Un insieme $G = \{v_1, \dots, v_n\}$ è un **insieme di generatori** di V se $\text{Span}(G) = V$, cioè se ogni $z \in V$ è C.L. dei vettori di G . Uno spazio è **finitamente generato** se ammette un insieme finito di generatori.

2.5 Dipendenza e indipendenza lineare

DEFINIZIONE

Indipendenza lineare

I vettori $v_1, \dots, v_n$ sono **linearmente indipendenti** (L.I.) se $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = \mathbf{0} \Rightarrow a_1 = \dots = a_n = 0$. Altrimenti si dicono **linearmente dipendenti** (L.D.): esiste una C.L. nulla con coefficienti non tutti nulli.

PROPOSIZIONE

(a) $v_1, \dots, v_n$ ($n \geq 2$) sono L.D. $\Leftrightarrow$ almeno uno di essi è C.L. degli altri. (b) Un insieme che contiene il vettore nullo è L.D. (c) Un sottoinsieme di un insieme L.I. è L.I.; un insieme che contiene un sottoinsieme L.D. è L.D. (d) In $\mathbb{K}^n$, più di n vettori sono sempre L.D.

METODO

Verificare se dei vettori di $\mathbb{K}^n$ sono L.I.

Si dispongono i vettori **per riga** (o per colonna) in una matrice A e si calcola il rango: i vettori sono L.I. se e solo se $\text{rk } A$ è uguale al loro numero. Per vettori in $\mathbb{K}^n$ con n vettori, equivale a $\det A \neq 0$. In alternativa, si usa la definizione: si impone $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = \mathbf{0}$, si ottiene un sistema omogeneo nelle a_i e si controlla se ammette solo la soluzione banale.

ESEMPIO

In $\mathbb{R}^4$ siano $v_1 = (1, 1, 1, -1)$, $v_2 = (0, 1, 0, 1)$, $v_3 = (0, 0, 2, 0)$, $v_4 = (2, 0, 0, 1)$. Si dispongono per riga e si riduce:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 + 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

La matrice ridotta ha 4 pivot $(1, 1, 2, 5)$: $\text{rk} = 4$ e $\det = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5 = 10 \neq 0$. I quattro vettori sono **linearmente indipendenti**, quindi formano una base di $\mathbb{R}^4$.

2.6 Basi e coordinate

DEFINIZIONE

Base

Un insieme ordinato $B = (v_1, \dots, v_n)$ è una **base** di V se ogni vettore di V si scrive come combinazione lineare dei v_i in **modo unico**.

TEOREMA

Caratterizzazione delle basi

$B = (v_1, \dots, v_n)$ è una base di $V \Leftrightarrow$ i v_i sono linearmente indipendenti e generatori di V .

Dimostrazione. $(\Rightarrow)$ Generatori per definizione. Per l'indipendenza: $\mathbf{0} = 0v_1 + \dots + 0v_n$ è una scrittura di $\mathbf{0}$ e, per l'unicità, è l'unica, quindi $\sum a_i v_i = \mathbf{0} \Rightarrow a_i = 0$. $(\Leftarrow)$ L'esistenza della C.L. segue dal fatto che sono generatori. Se $v = \sum a_i v_i = \sum b_i v_i$ allora $\sum (a_i - b_i) v_i = \mathbf{0}$ e, per l'indipendenza, $a_i = b_i$.

DEFINIZIONE

Coordinate

Se $B = (v_1, \dots, v_n)$ è una base e $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$, la lista di n numeri $(a_1, \dots, a_n) = [v]_B$ è il vettore delle **coordinate** (o componenti) di v rispetto a B . L'applicazione $v \mapsto [v]_B$ è biettiva e rispetta somma e prodotto per scalari.

La **base canonica** di $\mathbb{K}^n$ è $E = (e_1, \dots, e_n)$ con e_i il vettore con 1 al posto i e 0 altrove: le coordinate di $x \in \mathbb{K}^n$ rispetto a E sono le componenti stesse di x .

METODO

Coordinate rispetto a una base di $\mathbb{K}^n$

Per trovare $[v]_B$ si risolve il sistema $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ nelle incognite a_i (sistema la cui matrice ha i v_i in **colonna**). Esempio: $B = ((1,0,0), (0,1,1), (1,1,0))$; per (x,y,z) : $x = a + c$, $y = b + c$, $z = b$ da cui $a = x - y + z$, $b = z$, $c = y - z$.

2.7 Lemma di Steinitz, dimensione e formula di Grassmann

LEMMA

Lemma di Steinitz

Se V è generato da m vettori e $u_1, \dots, u_k \in V$ sono linearmente indipendenti, allora $k \leq m$. (In parole: il numero dei vettori indipendenti non supera il numero dei generatori.)

Dimostrazione. Sia $G = \{g_1, \dots, g_m\}$ un insieme di generatori e supponiamo per assurdo $k > m$. Poiché $u_1 \in \text{Span}(G)$ e $u_1 \neq \mathbf{0}$, $u_1 = \sum c_i g_i$ con qualche $c_i \neq 0$; a meno di rinumerare, $c_1 \neq 0$, quindi $g_1 \in \text{Span}(u_1, g_2, \dots, g_m)$ e anche $(u_1, g_2, \dots, g_m)$ è un sistema di generatori. Ripetiamo: scritto u_2 in termini di $(u_1, g_2, \dots, g_m)$, nella combinazione deve comparire almeno un g_j con coefficiente non nullo (altrimenti u_1, u_2 sarebbero L.D.); lo scambiamo con u_2 . Dopo m passi $(u_1, \dots, u_m)$ genera V , perciò u_{m+1} è C.L. di $u_1, \dots, u_m$, contro l'indipendenza di $u_1, \dots, u_k$.

TEOREMA

Teorema sulle basi (invarianza della dimensione)

Se V è finitamente generato, tutte le sue basi hanno lo stesso numero di elementi. Tale numero si chiama **dimensione** di V e si indica $\dim V$.

Dimostrazione. Siano B e B' due basi, con n e n' elementi. B è L.I. e B' genera: per Steinitz $n \leq n'$. Scambiando i ruoli $n' \leq n$.

Conseguenze, per $\dim V = n$:

- n vettori L.I. sono automaticamente una base; n generatori sono automaticamente una base;
- ogni insieme L.I. si può **completare** a una base; da ogni insieme di generatori si può **estrarre** una base;
- se $W \leq V$ allora $\dim W \leq \dim V$, e $\dim W = \dim V \Leftrightarrow W = V$;
- $\dim \mathbb{K}^n = n$, $\dim \mathbb{K}^{m,n} = mn$, $\dim \mathbb{K}[x]_{\leq n} = n + 1$.

TEOREMA

Formula di Grassmann

Se W_1, W_2 sono sottospazi di uno spazio V di dimensione finita, allora

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

In particolare $\dim(W_1 \oplus W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$.

Dimostrazione. Sia $(u_1, \dots, u_r)$ una base di $W_1 \cap W_2$. La si completa a una base $(u_1, \dots, u_r, a_1, \dots, a_s)$ di W_1 e a una base $(u_1, \dots, u_r, b_1, \dots, b_t)$ di W_2 . Basta mostrare che (u_i, a_j, b_k) è una base di $W_1 + W_2$ (essa ha $r + s + t$ elementi, mentre $\dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) = (r + s) + (r + t) - r$). Generano chiaramente $W_1 + W_2$. Indipendenza: da $\sum \alpha_i u_i + \sum \beta_j a_j + \sum \gamma_k b_k = \mathbf{0}$ segue $\sum \gamma_k b_k = -\sum \alpha_i u_i - \sum \beta_j a_j \in W_1 \cap W_2$, quindi è C.L. degli u_i ; per l'indipendenza di (u_i, b_k) tutti i γ_k sono nulli. Resta $\sum \alpha_i u_i + \sum \beta_j a_j = \mathbf{0}$ e, per l'indipendenza di (u_i, a_j) , $\alpha_i = \beta_j = 0$.

ESEMPIO

In $\mathbb{R}^3$ due piani distinti per l'origine hanno $\dim = 2$ ciascuno e $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$: per Grassmann $\dim(W_1 \cap W_2) = 2 + 2 - 3 = 1$, cioè si intersecano in una retta.

2.8 Come si assegna un sottospazio: equazioni cartesiane, elemento generico, combinazione lineare

Un sottospazio $W \leq \mathbb{K}^n$ può essere assegnato in tre modi equivalenti. Il **passaggio** dall'una all'altra descrizione è una procedura di calcolo fondamentale.

1. **Equazioni cartesiane:** $W = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \text{ sistema omogeneo}\}$, ad es. $\{(x, y, z) \mid x = y - z = 0\}$.
2. **Elemento generico:** $W = \{(\text{espressioni nelle variabili libere})\}$, ad es. $\{(0, z, z)\}$.
3. **Combinazione lineare / generatori:** $W = \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$.

METODO

Cartesiana → elemento generico → generatori

Si risolve il sistema isolando più variabili possibili (le restanti sono le **variabili libere**), e si scrive il vettore generico in funzione di esse. Per ottenere i generatori si pone, **a turno**, una variabile libera uguale a 1 e le altre uguali a 0: i vettori ottenuti sono una base di W e $\dim W = \text{numero delle variabili libere} = n - \text{rk}(\text{matrice del sistema})$.

Esempio. $\{x = y - z = 0\}$: $x = 0$, $y = z$; variabile libera z ; elemento generico $(0, z, z)$; con $z = 1$ si ha la base $\{(0, 1, 1)\}$, $\dim W = 1$. *Esempio.* $\{y, 3z, z\}$ (elemento generico con variabili libere y, z): ponendo $(y, z) = (1, 0)$ e $(0, 1)$ si hanno i generatori $(1, 0, 0)$ e $(0, 3, 1)$.

METODO

Generatori → cartesiana (metodo della «matrice Z»)

Dati i generatori $v_1, \dots, v_k$ (L.I.) di $W \leq \mathbb{K}^n$ si costruisce la matrice Z che ha **per righe** i vettori v_i e, **come ultima riga**, le incognite $(x_1, \dots, x_n)$. Il vettore x appartiene a W se e solo se $\text{rk } Z = k$, cioè se l'ultima riga è C.L. delle precedenti. Concretamente:

- se Z è **quadrata** ($k = n - 1$): si impone $\det Z = 0$ (una sola equazione);
- altrimenti si **riduce per righe** Z e si impongono a zero gli elementi dell'ultima riga non nulli dopo la riduzione.

Esempio (quadrata). $\text{Span}((1, 1, 0), (1, 0, 1))$:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix} = 1 \cdot (0 \cdot z - y) - 1 \cdot (z - x) + 0 = -y - z + x.$$

Cartesiana: $x - y - z = 0$.

Esempio (rettangolare). $\text{Span}((-1, 0, 0, 1), (2, 0, 1, -1)) \leq \mathbb{R}^4$. Si ha

$$Z = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix};$$

con $R_2 \rightarrow R_2 + 2R_1$, $R_3 \rightarrow R_3 + xR_1$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & y & z & t + x \end{pmatrix}$$

e poi $R_3 \rightarrow R_3 - zR_2$ dà $(0, y, 0, t + x - z)$. Le condizioni sono $y = 0$ e $z = x + t$: elemento generico $(x, 0, x + t, t)$. Ci sono due equazioni cartesiane e $\dim W = 4 - 2 = 2$, coerente.

ATTENZIONE

Dall'elemento generico alla cartesiana **non** si pongono le variabili uguali a numeri: si eliminano i parametri. Ad esempio da $(y, 3z, z)$ con (x_1, x_2, x_3) le componenti si ha $x_1 = y$, $x_2 = 3z$, $x_3 = z$, da cui $x_2 = 3x_3$ (unica equazione cartesiana, y libera).

Applicazioni lineari

Le funzioni che rispettano la struttura vettoriale: nucleo, immagine, matrice associata e cambi di base.

3.1 Definizione ed esempi

DEFINIZIONE

Applicazione lineare

Siano V, W due spazi vettoriali su $\mathbb{K}$. Una funzione $f: V \rightarrow W$ è un'**applicazione lineare** (omomorfismo) se per ogni $v, v' \in V$ e $a \in \mathbb{K}$:

1. $f(v + v') = f(v) + f(v')$ (additività, «prima proprietà di linearità»);
2. $f(av) = a f(v)$ (omogeneità, «seconda proprietà di linearità»).

Equivalentemente $f(av + bv') = af(v) + bf(v')$. Un **endomorfismo** è un'applicazione lineare $f: V \rightarrow V$; un **isomorfismo** è un'applicazione lineare biettiva; un isomorfismo $V \rightarrow V$ si chiama anche **automorfismo**. L'**applicazione identica** è $\text{id}_V(v) = v$.

Da subito: $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ e $f(-v) = -f(v)$ (basta usare $a = 0$ e $a = -1$). Una condizione necessaria per la linearità è dunque che l'origine vada nell'origine.

ESEMPIO

- $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x + y, z - x)$ è lineare (ogni componente è un polinomio omogeneo di grado 1).
- $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x, y) = (x + 1, y)$ **non** è lineare ($g(0, 0) \neq (0, 0)$); $h(x, y) = (xy, y)$ non è lineare (termine di secondo grado).
- La derivata $D: \mathbb{K}[x]_{\leq n} \rightarrow \mathbb{K}[x]_{\leq n}$ è un endomorfismo; la trasposizione $A \mapsto A^T$ è un isomorfismo $\mathbb{K}^{m,n} \rightarrow \mathbb{K}^{n,m}$.

TEOREMA

Una applicazione lineare è determinata dai valori sulla base

Se $(v_1, \dots, v_n)$ è una base di V e $w_1, \dots, w_n \in W$ sono vettori qualunque, esiste **una e una sola** applicazione lineare $f: V \rightarrow W$ con $f(v_i) = w_i$ per ogni i ; essa è $f(\sum a_i v_i) = \sum a_i w_i$.

Dimostrazione. Unicità: se f è lineare, $f(\sum a_i v_i) = \sum a_i f(v_i) = \sum a_i w_i$ è forzata. Esistenza: ogni v ha coordinate uniche (a_i) , quindi la formula definisce una funzione; la linearità segue dalla linearità delle coordinate.

3.2 Nucleo e immagine

DEFINIZIONE

Nucleo e immagine

Sia $f: V \rightarrow W$ lineare. Il **nucleo** è $\text{Ker } f = \{v \in V \mid f(v) = \mathbf{0}_W\} \subseteq V$. L'**immagine** è $\text{Im } f = \{f(v) \mid v \in V\} \subseteq W$.

TEOREMA

$\text{Ker } f$ è un sottospazio di V e $\text{Im } f$ è un sottospazio di W .

Dimostrazione. Nucleo. $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ quindi $\mathbf{0} \in \text{Ker } f$. Se $v, v' \in \text{Ker } f$, $f(v + v') = f(v) + f(v') = \mathbf{0}$; se $a \in \mathbb{K}$, $f(av) = af(v) = \mathbf{0}$. **Immagine.** Se $w_1 = f(z_1)$ e $w_2 = f(z_2)$, per la prima proprietà $w_1 + w_2 = f(z_1 + z_2) \in \text{Im } f$; per la seconda $aw_1 = f(az_1) \in \text{Im } f$; inoltre $\mathbf{0} = f(\mathbf{0}) \in \text{Im } f$.

TEOREMA

Nucleo e iniettività

f è iniettiva $\Leftrightarrow \text{Ker } f = \{\mathbf{0}\}$.

Dimostrazione. $(\Rightarrow)$ Se $v \in \text{Ker } f$ allora $f(v) = \mathbf{0} = f(\mathbf{0})$ e, per iniettività, $v = \mathbf{0}$. $(\Leftarrow)$ Se $f(v_1) = f(v_2)$, allora $f(v_1 - v_2) = \mathbf{0}$, quindi $v_1 - v_2 \in \text{Ker } f = \{\mathbf{0}\}$ e $v_1 = v_2$.

Inoltre f è **suriettiva** $\Leftrightarrow \text{Im } f = W \Leftrightarrow \dim \text{Im } f = \dim W$. Se $(v_1, \dots, v_n)$ è una base di V , allora $\text{Im } f = \text{Span}(f(v_1), \dots, f(v_n))$.

TEOREMA

Teorema del nucleo e dell'immagine (rango e nullità)

Se V ha dimensione finita e $f: V \rightarrow W$ è lineare, allora

$$\dim V = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f.$$

Dimostrazione. Sia $(u_1, \dots, u_k)$ una base di $\text{Ker } f$ e la si completi a una base $(u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_r)$ di V . Mostriamo che $(f(v_1), \dots, f(v_r))$ è una base di $\text{Im } f$: così $\dim \text{Im } f = r$ e $\dim V = k + r$. **Generano:** ogni elemento di $\text{Im } f$ è $f(\sum \alpha_i u_i + \sum \beta_j v_j) = \sum \beta_j f(v_j)$ perché $f(u_i) = \mathbf{0}$. **Indipendenti:** se $\sum \beta_j f(v_j) = \mathbf{0}$ allora $f(\sum \beta_j v_j) = \mathbf{0}$, cioè $\sum \beta_j v_j \in \text{Ker } f$ e si scrive $\sum \gamma_i u_i$; da $\sum \beta_j v_j - \sum \gamma_i u_i = \mathbf{0}$ e l'indipendenza della base di V segue $\beta_j = \gamma_i = 0$.

COROLLARIO

Se $\dim V = \dim W = n$ le seguenti condizioni sono equivalenti: f iniettiva $\Leftrightarrow f$ suriettiva $\Leftrightarrow f$ biettiva $\Leftrightarrow \det M(f) \neq 0$. Inoltre due spazi di dimensione finita sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione ($V \cong \mathbb{K}^n$ tramite le coordinate).

Applicazione inversa e composizione. Se $f: V \rightarrow W$ e $g: W \rightarrow V$ sono lineari con $g \circ f = \text{id}_V$ e $f \circ g = \text{id}_W$, allora f è invertibile e $g = f^{-1}$ (cioè f è un isomorfismo). La composizione di applicazioni lineari è lineare.

3.3 Matrice associata a un'applicazione lineare

DEFINIZIONE

Matrice associata

Siano $B = (v_1, \dots, v_n)$ base di V , $C = (w_1, \dots, w_m)$ base di W e $f: V \rightarrow W$ lineare. La **matrice associata** $M_{B,C}(f) \in \mathbb{K}^{m,n}$ ha come colonna di indice j le coordinate di $f(v_j)$ rispetto a C :

$$M_{B,C}(f) = ([f(v_1)]_C \mid \dots \mid [f(v_n)]_C).$$

Se si usano le basi canoniche si scrive semplicemente $M(f)$.

TEOREMA

Per ogni $v \in V$: $[f(v)]_C = M_{B,C}(f) [v]_B$. L'applicazione $f \mapsto M_{B,C}(f)$ è un isomorfismo tra lo spazio delle applicazioni lineari $V \rightarrow W$ e $\mathbb{K}^{m,n}$; manda la composizione nel prodotto di matrici: $M(g \circ f) = M(g) M(f)$. Inoltre $\dim \text{Im } f = \text{rk } M(f)$ e f è invertibile $\Leftrightarrow M(f)$ è quadrata invertibile, con $M(f^{-1}) = M(f)^{-1}$.

Ogni matrice $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ definisce a sua volta l'applicazione lineare $f_A: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$, $f_A(x) = Ax$.

3.4 Assegnare un'applicazione lineare: legge, immagini, matrice

Un'applicazione lineare $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ può essere assegnata in tre modi equivalenti, e bisogna saper passare dall'uno all'altro.

METODO

Dalla legge alle immagini e alla matrice

Legge $\rightarrow$ **immagini**. Si sceglie la base canonica del dominio e si calcolano $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ sostituendo nella legge. **Immagini** $\rightarrow$ **matrice**. Si mettono le immagini delle basi canoniche **in colonna**. **Matrice** $\rightarrow$ **legge**. Si moltiplica $M(f)$ per il vettore colonna delle incognite $(x, y, z)^T$ e si leggono le componenti del risultato.

Esempio. $f(x, y, z) = (-x - 2y, -x, -x + (h + 3)z)$: $f(e_1) = (-1, -1, -1)$, $f(e_2) = (-2, 0, 0)$, $f(e_3) = (0, 0, h + 3)$, quindi

$$M(f) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & h + 3 \end{pmatrix}.$$

METODO

Immagini su una base non canonica

Se sono date le immagini $f(u_1), f(u_2), f(u_3)$ su una base (u_1, u_2, u_3) **non canonica**, si hanno due strade.

(A) Si ricavano le immagini della base canonica. Si esprimono i u_i tramite i e_j e si usa la linearità, risolvendo il sistema lineare nelle incognite $f(e_j)$. (B) Si ricava la legge. Si scrive $(x, y, z) = a u_1 + b u_2 + c u_3$, si trovano a, b, c in funzione di x, y, z (sistema lineare) e si ottiene $f(x, y, z) = a f(u_1) + b f(u_2) + c f(u_3)$.

Esempio. Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ con

$$f(e_1) = (0, -1, 0, -1), \quad f(0, 1, 1) = (h + 1, h + 2, h + 1, h + 2), \quad f(1, 1, 0) = (h, h, h + 1, h - 1).$$

Poiché $f(0, 1, 1) = f(e_2) + f(e_3)$ e $f(1, 1, 0) = f(e_1) + f(e_2)$:

$$f(e_2) = (h, h, h + 1, h - 1) - (0, -1, 0, -1) = (h, h + 1, h + 1, h),$$

$$f(e_3) = (h + 1, h + 2, h + 1, h + 2) - (h, h + 1, h + 1, h) = (1, 1, 0, 2).$$

Quindi

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & h & 1 \\ -1 & h + 1 & 1 \\ 0 & h + 1 & 0 \\ -1 & h & 2 \end{pmatrix},$$

$$f(x, y, z) = (hy + z, -x + (h + 1)y + z, (h + 1)y, -x + hy + 2z).$$

3.5 Studio di nucleo e immagine

METODO

Studiare $\text{Im } f$

Data $M(f)$ (rispetto alle basi canoniche):

- $\dim \text{Im } f = \text{rk } M(f)$;
- una **base** di $\text{Im } f$ è data dalle colonne linearmente indipendenti di $M(f)$ (se ne prendono tante quante il rango, scegliendo colonne che corrispondono a pivot);
- l'**equazione cartesiana** di $\text{Im } f$ si ottiene con il metodo della matrice Z (§2.8) applicato ai vettori della base; se $\dim \text{Im } f = \dim W$ non c'è equazione (è tutto W); se $\dim \text{Im } f = 0$ l'immagine è $\{0\}$ ($x = y = \dots = 0$).

Esempio. $f(x,y) = (x + y, 3x - y, -2x + 4y)$,

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Il rango è 2, base $\{(1,3,-2), (1,-1,4)\}$. Cartesiana:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \\ x & y & z \end{pmatrix} = 10x - 6y - 4z = 0,$$

cioè $5x - 3y - 2z = 0$ (verifica: $(1,3,-2) \mapsto 5 - 9 + 4 = 0$).

METODO

Studiare $\text{Ker } f$

- $\dim \text{Ker } f = \dim V - \dim \text{Im } f$ (teorema del nucleo e dell'immagine);
- una **base** si ottiene risolvendo il sistema omogeneo $M(f) X = 0$: si scrive l'elemento generico in funzione delle variabili libere e si pone a turno una variabile libera = 1 e le altre = 0;
- le **equazioni cartesiane** di $\text{Ker } f$ sono proprio le equazioni indipendenti del sistema $M(f)X = 0$ (se $\text{Ker } f = \{0\}$ non esiste base e le equazioni sono $x = y = z = 0$).

Esempio. Con la $M(f)$ a quattro righe e tre colonne dell'esempio precedente (parametro h): $\text{rk } M(f) = 3$ per $h \neq -1$, quindi $\text{Ker } f = \{0\}$ ed f è iniettiva; per $h = -1$ il rango è 2 e $\text{Ker } f$ ha dimensione 1.

ESEMPIO

Studio completo al variare di h

Con

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & h & 1 \\ -1 & h+1 & 1 \\ 0 & h+1 & 0 \\ -1 & h & 2 \end{pmatrix} :$$

il minore ottenuto con le prime tre righe è

$$\det \begin{pmatrix} 0 & h & 1 \\ -1 & h+1 & 1 \\ 0 & h+1 & 0 \end{pmatrix} = -(h+1).$$

Dunque:

- $h \neq -1$: $\text{rk} = 3$, $\dim \text{Im } f = 3$ (base: le tre colonne), $\text{Ker } f = \{0\}$, f iniettiva e non suriettiva (ha $\dim \text{Im } f = 3 < 4$). L'immagine in $\mathbb{R}^4$ ha una sola equazione cartesiana, ottenibile con la matrice Z .
- $h = -1$:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ha rango 2 (la quarta riga è la somma delle prime due, la terza è nulla). $\text{Im } f = \text{Span}((0, -1, 0, -1), (-1, 0, 0, -1))$, di equazioni cartesiane $z = 0$, $t = x + y$. Il nucleo si ottiene da $-y + z = 0$, $-x + z = 0$: $\text{Ker } f = \text{Span}((1, 1, 1))$.

3.6 Controimmagine

DEFINIZIONE

Controimmagine

Per $w \in W$ la **controimmagine** è $f^{-1}(w) = \{v \in V \mid f(v) = w\}$. Se $w \notin \text{Im } f$ è vuota; altrimenti, se v_0 è una soluzione particolare, $f^{-1}(w) = v_0 + \text{Ker } f = \{v_0 + k \mid k \in \text{Ker } f\}$ (è un «sottospazio traslato», non un sottospazio se $w \neq 0$).

METODO

Calcolo della controimmagine

Si impone $f(x, y, z, \dots) = w$ e si risolve il sistema lineare ottenuto (con Rouché e Capelli: se $\text{rk } M(f) = \text{rk}(M(f) \mid w)$ ci sono soluzioni, in numero $\infty^{\dim \text{Ker } f}$).

Esempio. $f(x, y, z, t) = (x + y, z, y - t, x - t)$ e $w = (1, 0, 1, 1)$: da $x + y = 1$, $z = 0$, $y - t = 1$, $x - t = 1$ si ricava $x + t = 0$ e quindi $x = 1/2$, $t = -1/2$, $y = 1/2$, $z = 0$. La controimmagine è l'unico punto $(1/2, 1/2, 0, -1/2)$ (infatti $\text{Ker } f = \{0\}$).

3.7 Cambi di base

DEFINIZIONE

Matrice del cambiamento di base

Siano $B = (v_1, \dots, v_n)$ e $B' = (v'_1, \dots, v'_n)$ due basi di V . La matrice $P = M_{B',B}(\text{id}_V)$ ha per colonne le coordinate dei v'_j rispetto a B . Essa è invertibile e per ogni v :

$$[v]_B = P [v]_{B'}, \quad [v]_{B'} = P^{-1} [v]_B.$$

TEOREMA

Matrice associata e cambi di base

Sia $f: V \rightarrow W$ lineare, B, B' basi di V con matrice di passaggio P e C, C' basi di W con matrice di passaggio Q (colonne: coordinate della nuova base rispetto alla vecchia). Allora

$$M_{B',C'}(f) = Q^{-1} M_{B,C}(f) P.$$

In particolare, per un endomorfismo con la stessa base su dominio e codominio, $M_{B'}(f) = P^{-1} M_B(f) P$: le matrici di uno stesso endomorfismo in basi diverse sono **simili** (§6).

Dimostrazione. Per ogni v : $[f(v)]_{C'} = Q^{-1} [f(v)]_C = Q^{-1} M_{B,C}(f) [v]_B = Q^{-1} M_{B,C}(f) P [v]_{B'}$, e la matrice che manda $[v]_{B'}$ in $[f(v)]_{C'}$ è per definizione $M_{B',C'}(f)$.

ESEMPIO

Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x+y, x+y)$, con

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

e $B' = ((1,1), (1,-1))$. Allora

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e

$$P^{-1} M(f) P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}:$$

in base B' l'applicazione è diagonale (anticipa la diagonalizzazione).

Matrici e sistemi lineari

Calcolo matriciale, riduzione di Gauss, rango e risoluzione dei sistemi lineari.

4.1 Operazioni tra matrici

Una matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m,n}$ ha m righe e n colonne; a_{ij} sta alla riga i e colonna j . Se $m = n$ la matrice è **quadrata** e gli elementi $a_{11}, \dots, a_{nn}$ formano la **diagonale principale**.

- **Somma** (solo tra matrici della stessa forma): $(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. La matrice **opposta** di A è $-A = (-a_{ij})$.
- **Prodotto per uno scalare** (prodotto esterno): $h \cdot A = (h a_{ij})$.
- **Prodotto righe per colonne**: se $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ e $B \in \mathbb{K}^{n,p}$ (colonne di A = righe di B), $AB \in \mathbb{K}^{m,p}$ ha elementi

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = (\text{riga } i \text{ di } A) \cdot (\text{colonna } j \text{ di } B)$$

(prodotto scalare di riga per colonna: $(a,b,c) \cdot (a',b',c') = aa' + bb' + cc'$).

- **Trasposta**: $A^T \in \mathbb{K}^{n,m}$, $(A^T)_{ij} = a_{ji}$.

Proprietà: $(\mathbb{K}^{m,n}, +)$ è un gruppo abeliano e, con il prodotto esterno, uno spazio vettoriale di dimensione mn ; il prodotto è associativo e distributivo, $(AB)^T = B^T A^T$, ma **non è commutativo** in generale ($AB \neq BA$) e vale la **legge di annullamento solo in parte**: $AB = 0$ non implica $A = 0$ o $B = 0$.

ESEMPIO

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ma

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.2 Matrici notevoli

- **Matrice nulla** 0 ; **identità** I_n (1 sulla diagonale, 0 altrove), elemento neutro del prodotto: $AI = IA = A$.
- **Diagonale**: nulla fuori dalla diagonale principale. **Triangolare superiore/inferiore**: nulla sotto/sopra la diagonale principale.
- **Simmetrica**: $A = A^T$. **Antisimmetrica**: $A = -A^T$ (diagonale nulla).
- **Invertibile**: $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ è invertibile se esiste A^{-1} con $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ (condizioni equivalenti: $\det A \neq 0$, $\text{rk } A = n$). Vale $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- **Ortagonale**: $A^T A = I$ (§7). **Idempotente**: $A^2 = A$. **Nilpotente**: $A^k = 0$ per qualche k .
- La **traccia** di una matrice quadrata è $\text{tr } A = \sum a_{ii}$.

4.3 Metodo di Gauss (riduzione per righe)

Le **operazioni elementari sulle righe** sono: (1) scambiare due righe; (2) moltiplicare una riga per uno scalare $\neq 0$; (3) sommare a una riga un multiplo di un'altra ($R_i \rightarrow R_i + cR_j$). Esse non cambiano lo spazio generato dalle righe né le soluzioni di un sistema.

DEFINIZIONE

Matrice ridotta (a scala)

Una matrice è **ridotta per righe** (a scala) se in ogni riga non nulla il primo elemento non nullo (detto **pivot** o *elemento speciale*) sta in una colonna strettamente a destra del pivot della riga precedente; le righe nulle stanno in fondo. Le colonne possono contenere zeri anche prima dei pivot, e le righe nulle possono essere più di una.

TEOREMA

Ogni matrice si riduce per righe, con un numero finito di operazioni elementari, a una matrice a scala. Il **numero di pivot** non dipende dalla riduzione scelta.

La riduzione per colonne si definisce allo stesso modo (scambiando il ruolo di righe e colonne). Il **metodo di Gauss e Jordan** prosegue la riduzione fino ad avere pivot uguali a 1 e zeri anche sopra i pivot.

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Scambiando $R_1 \leftrightarrow R_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix};$$

$R_3 \rightarrow R_3 + R_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$R_3 \rightarrow R_3 + R_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Due pivot: $\text{rk } A = 2$.

4.4 Rango di una matrice

DEFINIZIONE

Rango

Il **rango** $\rho(A) = \text{rk } A$ di una matrice è, equivalentemente: (1) il numero di pivot di una sua riduzione a scala; (2) l'**ordine massimo di un minore non nullo** estraibile da A (un *minore* di ordine k è il determinante di una sottomatrice quadrata $k \times k$); (3) la dimensione dello spazio generato dalle righe; (4) la dimensione dello spazio generato dalle colonne.

In particolare $\text{rk } A = \text{rk } A^T$, $\text{rk } A \leq \min(m, n)$, e per A quadrata $n \times n$: $\text{rk } A = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$. Per le matrici quadrate si preferisce il calcolo con i minori (o il determinante); per quelle rettangolari la riduzione. Con la definizione per

minori si usa il **teorema di Kronecker (degli orlati)**: se A ha un minore non nullo M di ordine k e **tutti i minori di ordine $k + 1$ che lo contengono** (orlati di M) sono nulli, allora $\text{rk } A = k$ (§5).

4.5 Sistemi lineari: rango e compatibilità

DEFINIZIONE

Sistema lineare

Un **sistema lineare** di m equazioni in n incognite è $AX = B$ con $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ matrice dei coefficienti, $X = (x_1, \dots, x_n)^T$, $B \in \mathbb{K}^{m,1}$ colonna dei termini noti. La matrice $(A | B)$ si dice **completa**. Il sistema è **omogeneo** se $B = 0$.

TEOREMA

Rouché e Capelli

(1) Il sistema $AX = B$ è **compatibile** (ha soluzione) $\Leftrightarrow \text{rk } A = \text{rk}(A|B)$. (2) In tal caso, posto $\rho = \text{rk } A$, le soluzioni dipendono da $n - \rho$ parametri liberi: sono $\infty^{n-\rho}$. Se $\rho = n$ la soluzione è unica.

Dimostrazione. (1) $AX = B$ equivale a $B = x_1 C_1 + \dots + x_n C_n$ (C_j colonne di A), cioè $B \in \text{Span}(C_1, \dots, C_n)$, il che accade se e solo se aggiungere B non aumenta la dimensione dello spazio delle colonne. (2) L'insieme delle soluzioni è $X_0 + \text{Ker } f_A$ con X_0 soluzione particolare, e $\dim \text{Ker } f_A = n - \text{rk } A$ per il teorema del nucleo e dell'immagine.

TEOREMA

Sistemi omogenei

Il sistema omogeneo $AX = 0$ ha sempre la soluzione banale; l'insieme delle soluzioni è un sottospazio $\text{Ker } f_A \leq \mathbb{K}^n$ di dimensione $n - \text{rk } A$. Ha soluzioni non banali $\Leftrightarrow \text{rk } A < n$.

METODO

Risolvere un sistema con Gauss

Si scrive la matrice completa $(A|B)$, la si riduce a scala con operazioni sulle **righe**, si confrontano i ranghi (Rouché e Capelli), si scelgono come variabili libere quelle delle colonne **senza pivot**, e si risolve a ritroso.

Esempio con parametro.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + hy + z = 1 \\ x + y + hz = h \end{cases}$$

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & h & 1 & 1 \\ 1 & 1 & h & h \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & h-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h-1 & h-1 \end{pmatrix}.$$

Se $h \neq 1$ i pivot sono 3: soluzione unica $y = 0, z = 1, x = 0$. Se $h = 1$ resta una sola equazione $x + y + z = 1$: $\text{rk } A = \text{rk}(A|B) = 1$, soluzioni ∞^2 .

4.6 Calcolo della matrice inversa

Se $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ è invertibile, A^{-1} si calcola in due modi.

METODO

Con il metodo di Gauss e Jordan

Si affianca l'identità, $(A \mid I)$, e si eseguono operazioni elementari sulle righe fino a ottenere $(I \mid A^{-1})$. Se durante la riduzione compare una riga nulla nella parte sinistra, A non è invertibile.

Esempio.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} :$$

$$(A \mid I) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix},$$

quindi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

(infatti $\det A = -1$).

METODO

Con i cofattori (formula dell'aggiunta)

$A^{-1} = 1/(\det A) A^*$, dove $A^* = (A_{ij})^T$ è l'**aggiunta**, trasposta della matrice dei cofattori $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\text{minore complementare di } a_{ij})$. Per $n = 2$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

(Dettagli e dimostrazione al §5.)

Determinanti

Definizione, proprietà e metodi di calcolo del determinante, con le sue applicazioni.

5.1 Definizione e proprietà

Il **determinante** associa a ogni matrice quadrata $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ uno scalare $\det A = |A|$. Si definisce per ricorrenza.

DEFINIZIONE

Determinante

- $n = 1$: $\det(a) = a$.
- $n = 2$:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

- $n = 3$ (regola di Sarrus):

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

- $n \geq 2$ in generale: sviluppo di Laplace (vedi sotto) rispetto alla prima riga. Equivalentemente $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$.

TEOREMA

Proprietà del determinante

Per $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$:

1. $\det A = \det A^T$ (quindi ciò che vale per le righe vale per le colonne);
2. è **multilineare** nelle righe: è lineare in ciascuna riga quando le altre sono fissate; in particolare moltiplicando una riga per c il determinante si moltiplica per c , e $\det(cA) = c^n \det A$;
3. scambiando due righe il determinante **cambia segno**;
4. se due righe sono uguali o proporzionali, o c'è una riga nulla, $\det A = 0$;
5. sommando a una riga un multiplo di un'altra riga il determinante **non cambia** (è l'operazione usata nella riduzione di Gauss);
6. se A è triangolare (o diagonale) $\det A$ è il prodotto degli elementi della diagonale principale;
7. $\det I = 1$; **teorema di Binet**: $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Dalle proprietà segue che per calcolare un determinante di ordine alto conviene ridurre A a scala tenendo conto dei cambi di segno e dei fattori moltiplicativi: $\det A = \pm$ (prodotto dei pivot) se si usano solo scambi (che danno -1) e operazioni del tipo $R_i \rightarrow R_i + cR_j$.

5.2 Sviluppo di Laplace

DEFINIZIONE

Minore e cofattore

Il **minore complementare** M_{ij} di a_{ij} è il determinante della matrice $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta cancellando la riga i e la colonna j . Il **cofattore** (o complemento algebrico) è $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ (i segni formano una «scacchiera» $+ - + \dots$).

TEOREMA

Teoremi di Laplace

Primo teorema. Per ogni riga i (e analogamente per ogni colonna j): $\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$.

Secondo teorema. La somma dei prodotti degli elementi di una riga per i cofattori di un'altra riga è nulla: $\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} = 0$ per $i \neq k$.

Il secondo teorema si spiega così: la somma a sinistra è lo sviluppo, secondo la riga k , del determinante della matrice ottenuta sostituendo la riga k con la riga i ; tale matrice ha due righe uguali, quindi determinante 0.

METODO

Calcolo con Laplace

Si sceglie la riga o la colonna con più zeri e si sviluppa.

Esempio 3×3 .

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} = 1(0 - 24) - 2(0 - 20) + 3(0 - 5) = -24 + 40 - 15 = 1.$$

Esempio 4×4 .

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si sviluppa lungo la seconda colonna, che ha un solo elemento non nullo $b_{22} = -1$ (segno $(-1)^{2+2} = +$):

$$\det B = -1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -1 \cdot (2(-2 - 0) - 1(-8 - 1) + 0) = -1 \cdot 5 = -5.$$

Esempio con parametro.

$$\det \begin{pmatrix} h & 1 & 0 \\ 0 & h-1 & -h \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix} = h \cdot (h-1) \cdot h = h^2(h-1)$$

(matrice triangolare superiore).

5.3 Matrici invertibili, aggiunta e teorema di Cramer

TEOREMA

Teorema delle matrici invertibili

Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$. Allora:

- (a) A è invertibile $\Leftrightarrow \det A \neq 0$;
- (b) se $\det A \neq 0$, $A^{-1} = 1/(\det A) A^*$ con $A^* = (A_{ij})^T$ (matrice **aggiunta**);
- (c) se A è invertibile, $\det A^{-1} = 1/(\det A)$.

Dimostrazione. (a, $\Rightarrow$) Da $AA^{-1} = I$ e dal teorema di Binet $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$, dunque $\det A \neq 0$; questo dimostra anche (c). (b, e $\Leftarrow$ di a) Calcoliamo $A \cdot A^*$: l'elemento (i,k) è $\sum_j a_{ij}(A^*)_{jk} = \sum_j a_{ij}A_{kj}$, che per il primo teorema di Laplace vale $\det A$ se $i = k$ e per il secondo vale 0 se $i \neq k$. Perciò $AA^* = \det A \cdot I$ e, se $\det A \neq 0$, $A \cdot 1/(\det A)A^* = I$: A è invertibile con la formula (b). (Allo stesso modo $A^*A = \det A \cdot I$.)

ESEMPIO

Per

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

($\det A = 1$) i cofattori sono $A_{11} = -24$, $A_{12} = 20$, $A_{13} = -5$, $A_{21} = 18$, $A_{22} = -15$, $A_{23} = 4$, $A_{31} = 5$, $A_{32} = -4$, $A_{33} = 1$, quindi

$$A^{-1} = A^* = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

TEOREMA

Teorema di Cramer

Il sistema $AX = B$ con $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ è **determinato** (ha una e una sola soluzione) $\Leftrightarrow \det A \neq 0$. In tal caso la soluzione è

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \quad i = 1, \dots, n,$$

dove A_i è la matrice ottenuta da A sostituendo la **colonna** di indice i con la colonna dei termini noti B .

Dimostrazione. ($\Rightarrow$ esistenza e unicità, formula) Se $\det A \neq 0$, A è invertibile. Unicità: se $AX_1 = B = AX_2$ allora moltiplicando per A^{-1} si ha $X_1 = X_2$. Esistenza: $X = A^{-1}B$ è soluzione. Formula:

$$x_i = \sum_k (A^{-1})_{ik} b_k = \frac{1}{\det A} \sum_k A_{ki} b_k,$$

e $\sum_k b_k A_{ki}$ è lo sviluppo di Laplace di $\det A_i$ secondo la colonna i . ($\Leftarrow$) Se il sistema è determinato per Rouché e Capelli $n - \text{rk } A = 0$, cioè $\text{rk } A = n$, quindi $\det A \neq 0$.

ESEMPIO

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$\det A = -2$,

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}{-2} = 2,$$

$$y = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{-2} = 1.$$

5.4 Determinante e rango: il teorema degli orlati

TEOREMA

Rango per minori (teorema di Kronecker)

$\text{rk } A = k$ se e solo se A ha un minore di ordine k non nullo e tutti i minori di ordine $k + 1$ (se esistono) sono nulli. È sufficiente controllare **solo gli orlati** di un minore non nullo di ordine k (i minori di ordine $k + 1$ che lo contengono): se sono tutti nulli, $\text{rk } A = k$.

ESEMPIO

Il rango di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}:$$

il minore

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ha determinante $1 \neq 0$, quindi $\text{rk } A = 2$ (massimo possibile).

5.5 Interpretazione geometrica del determinante

- **Ordine 2.** $|\det(u|v)|$, con $u, v \in \mathbb{R}^2$ in colonna, è l'**area del parallelogramma** di lati u, v . Il segno dice se la coppia (u, v) è orientata come (e_1, e_2) (antioraria, $\det > 0$) o no.
- **Ordine 3.** $|\det(u|v|w)|$ è il **volume del parallelepipedo** di spigoli u, v, w : è il valore assoluto del prodotto misto $u \cdot (v \times w)$ (§8).
- **Applicazioni lineari.** Se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ha matrice A , il valore $|\det A|$ è il **fattore di scala** di aree/volumi sotto f , e il segno distingue le trasformazioni che conservano l'orientamento ($\det > 0$) da quelle che lo invertono ($\det < 0$).
- $\det = 0 \Leftrightarrow$ le colonne (o le righe) sono linearmente dipendenti $\Leftrightarrow$ i vettori sono complanari (in $\mathbb{R}^3$) o allineati (in $\mathbb{R}^2$) $\Leftrightarrow f$ «schiaccia» lo spazio in una dimensione inferiore.

Autovalori e diagonalizzazione

Autovalori, autovettori e criteri per ridurre un endomorfismo a forma diagonale.

6.1 Autovalori, autovettori, autospazi

DEFINIZIONE

Autovalore, autovettore, autospazio

Sia $f: V \rightarrow V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

- $\lambda \in \mathbb{K}$ è un **autovalore** di f se esiste $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}$, tale che $f(v) = \lambda v$.
- Un vettore $v \neq \mathbf{0}$ è un **autovettore** se esiste $\lambda \in \mathbb{K}$ con $f(v) = \lambda v$ (e λ è l'autovalore associato).
- L'**autospazio** relativo a λ è $V_\lambda = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$, cioè l'insieme degli autovettori di λ **più il vettore nullo** (che non è un autovettore).

Per un autovalore λ si definisce l'endomorfismo $f_\lambda: V \rightarrow V$, $f_\lambda(v) = f(v) - \lambda v$.

TEOREMA

$V_\lambda = \text{Ker } f_\lambda$; in particolare V_λ è un sottospazio e λ è un autovalore $\Leftrightarrow V_\lambda \neq \{\mathbf{0}\}$.

Dimostrazione. $v \in \text{Ker } f_\lambda \Leftrightarrow f(v) - \lambda v = \mathbf{0} \Leftrightarrow f(v) = \lambda v \Leftrightarrow v \in V_\lambda$. Gli autovettori sono i vettori non nulli del nucleo di f_λ , quindi λ è autovalore se e solo se $\text{Ker } f_\lambda \neq \{\mathbf{0}\}$.

6.2 Polinomio caratteristico

DEFINIZIONE

Polinomio caratteristico

Per $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ il **polinomio caratteristico** è $P_A(T) = \det(A - T I)$, polinomio di grado n in T . Il polinomio caratteristico di un endomorfismo f è quello di una qualunque matrice $M_B(f)$.

TEOREMA

(a) $P_A(T)$ non dipende dalla base: matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico. (b) $P_A(T) = (-1)^n T^n + (-1)^{n-1}(\text{tr } A) T^{n-1} + \dots + \det A$. (c) $\lambda \in \mathbb{K}$ è autovalore $\Leftrightarrow P_A(\lambda) = 0$.

Dimostrazione. (a) $\det(P^{-1}AP - TI) = \det(P^{-1}(A - TI)P) = \det P^{-1} \det(A - TI) \det P = \det(A - TI)$ (Binet). (c) λ è autovalore $\Leftrightarrow \text{Ker}(A - \lambda I) \neq \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$.

DEFINIZIONE

Molteplicità

La **molteplicità algebrica** m_λ è la molteplicità di λ come radice di $P_A(T)$ (il suo esponente nella fattorizzazione). La **molteplicità geometrica** è $g_\lambda = \dim V_\lambda$.

TEOREMA

Per ogni autovalore λ : $1 \leq g_\lambda \leq m_\lambda$. Inoltre $\sum_\lambda m_\lambda \leq n$, con uguaglianza se e solo se P_A è interamente scomponibile in fattori lineari su $\mathbb{K}$ (sempre vero su $\mathbb{C}$).

TEOREMA

Autovettori di autovalori distinti

Autovettori relativi ad autovalori **distinti** sono linearmente indipendenti. Di conseguenza la somma degli autospazi di autovalori distinti è diretta.

Dimostrazione. Per induzione su k sul numero di autovettori $v_1, \dots, v_k$ con autovalori distinti $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Per $k = 1$ è ovvio ($v_1 \neq 0$). Se $\sum c_i v_i = 0$, applicando f si ha $\sum c_i \lambda_i v_i = 0$; sottraendo λ_k volte la prima relazione, $\sum_{i < k} c_i (\lambda_i - \lambda_k) v_i = 0$. Per ipotesi induttiva $c_i (\lambda_i - \lambda_k) = 0$, quindi $c_i = 0$ per $i < k$ e infine $c_k v_k = 0$ dà $c_k = 0$.

Ricerca degli autovalori. Per trovare gli autovalori di f si scrive la matrice A di f in una base qualunque, si calcola $P_A(T) = \det(A - TI)$ e se ne cercano le radici in $\mathbb{K}$ (fattorizzando, o con la formula risolutiva): ciascuna radice è un autovalore e il suo esponente è la molteplicità algebrica. Ad esempio $P(T) = (T - 1)^2(T - 2)(T + 1)$ dà $m_1 = 2$, $m_2 = 1$, $m_{-1} = 1$.

6.3 Similitudine tra matrici e matrici diagonalizzabili

DEFINIZIONE

Matrici simili

$A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ sono **simili** se esiste $P \in \mathbb{K}^{n,n}$ invertibile con $P^{-1}AP = B$. La similitudine è una relazione di equivalenza; matrici simili hanno stesso determinante, traccia, rango, polinomio caratteristico e autovalori (sono le matrici dello stesso endomorfismo in basi diverse).

DEFINIZIONE

Endomorfismo semplice, matrice diagonalizzabile

Un endomorfismo f è **semplice** (o **diagonalizzabile**) se esiste una base di V formata da autovettori di f . Una matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ è **diagonalizzabile** se è simile a una matrice diagonale, cioè se lo è l'endomorfismo $f_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$.

TEOREMA

Diagonalizzazione

A è diagonalizzabile $\Leftrightarrow f_A$ è semplice $\Leftrightarrow \mathbb{K}^n$ ha una base di autovettori di A . In tal caso, se P è la matrice che ha per colonne gli autovettori e D la matrice diagonale con i rispettivi autovalori sulla diagonale, $P^{-1}AP = D$.

Dimostrazione. Se $B = (v_1, \dots, v_n)$ è una base di autovettori con $f(v_i) = \lambda_i v_i$, la matrice di f rispetto a B ha come colonna di indice j $(0, \dots, \lambda_j, \dots, 0)$, cioè è diagonale; per il cambio di base essa è $P^{-1}AP$ con $P = (v_1 | \dots | v_n)$. Viceversa se $P^{-1}AP = D$ diagonale, le colonne di P sono autovettori ($AP = PD$).

TEOREMA

Criteri di diagonalizzabilità

Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ con autovalori distinti $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$. Sono equivalenti:

1. A è diagonalizzabile;
2. $\sum_i \dim V_{\lambda_i} = n$ (cioè la base di $\mathbb{K}^n$ è l'unione delle basi degli autospazi);
3. P_A si scompone in fattori lineari su $\mathbb{K}$ e $g_{\lambda_i} = m_{\lambda_i}$ per ogni i .

Condizione **sufficiente** (non necessaria): A ha n autovalori distinti in $\mathbb{K}$ (allora ogni $m_{\lambda} = g_{\lambda} = 1$). Una condizione necessaria è che gli autovalori siano tutti in $\mathbb{K}$: ad esempio

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ ($P(T) = T^2 + 1$) ma lo è su $\mathbb{C}$.

METODO

Diagonalizzare una matrice (o studiarne la semplicità)

1. **Polinomio caratteristico:** $P_A(T) = \det(A - T I)$. (Se l'endomorfismo è dato tramite legge o immagini, si passa prima alla matrice.)
2. **Autovalori:** si risolve $P_A(T) = 0$ e si annotano le molteplicità algebriche m_{λ} (esponenti).
3. **Autospazi:** per ogni λ si calcola $V_{\lambda} = \text{Ker}(A - \lambda I)$ risolvendo $(A - \lambda I)X = 0$; si ottengono $g_{\lambda} = \dim V_{\lambda}$ e una base.
4. **Semplicità:** se $\sum g_{\lambda} = n$ (equivalentemente $g_{\lambda} = m_{\lambda}$ per ogni λ e tutti gli autovalori in $\mathbb{K}$) l'endomorfismo è semplice.
5. **Matrici:** D ha sulla diagonale gli autovalori, ciascuno ripetuto m_{λ} volte; P ha per colonne le basi degli autospazi, **nello stesso ordine** degli autovalori in D . Si ha $P^{-1}AP = D$.

ESEMPIO

Caso non diagonalizzabile

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} :$$

$$P_A(T) = \det \begin{pmatrix} 2-T & 1 & 0 \\ -1 & -T & 0 \\ 2 & 1 & -T \end{pmatrix} = -T((2-T)(-T) + 1) = -T(T-1)^2.$$

Autovalori: 0 ($m = 1$) e 1 ($m = 2$). $V_0 = \text{Ker } A$: $2x + y = 0$, $x = 0$, quindi $V_0 = \text{Span}((0,0,1))$. $V_1 = \text{Ker}(A - I)$: $x + y = 0$, $2x + y - z = 0$, cioè $V_1 = \text{Span}((1,-1,1))$, $g_1 = 1 < m_1 = 2$. Poiché $\sum g = 2 < 3$, A **non** è diagonalizzabile.

ESEMPIO**Caso diagonalizzabile**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} :$$

$P_A(T) = -(T-1)^2(T-2)$, autovalori 1 ($m=2$), 2 ($m=1$). $V_1 = \text{Ker}(A - I) = \{-x + y + z = 0\}$ ha dimensione 2, base $((1,1,0), (1,0,1))$; $V_2 = \text{Ker}(A - 2I) = \{z = x, y = x\} = \text{Span}((1,1,1))$. Poiché $g_1 + g_2 = 3$, A è diagonalizzabile con

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = D.$$

OSSERVAZIONE**Potenze**

Se $A = PDP^{-1}$ allora $A^k = PD^kP^{-1}$ e D^k è la diagonale delle potenze degli autovalori: utile per il calcolo di potenze di matrici.

Prodotto scalare e ortogonalità

Prodotto scalare, basi ortonormali, matrici ortogonali e teorema spettrale.

7.1 Prodotto scalare, norma, angoli

DEFINIZIONE

Prodotto scalare standard

Su $\mathbb{R}^n$ il **prodotto scalare** (euclideo) di $u = (u_1, \dots, u_n)$ e $v = (v_1, \dots, v_n)$ è $u \cdot v = \langle u, v \rangle = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n = u^T v$. Più in generale un prodotto scalare su uno spazio reale è una forma bilineare, simmetrica e definita positiva ($v \cdot v > 0$ per $v \neq 0$). La **norma** (lunghezza) è $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$; un vettore con $\|v\| = 1$ è un **versore**.

TEOREMA

Disuguaglianza di Cauchy e Schwarz e triangolare

$|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|$, con uguaglianza se e solo se u, v sono linearmente dipendenti; $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Dimostrazione. Se $v = 0$ è banale. Altrimenti, per ogni $t \in \mathbb{R}$, $0 \leq \|u - tv\|^2 = \|u\|^2 - 2t u \cdot v + t^2 \|v\|^2$; scegliendo $t = (u \cdot v) / \|v\|^2$ si ottiene

$$0 \leq \|u\|^2 - \frac{(u \cdot v)^2}{\|v\|^2},$$

cioè la tesi. La disuguaglianza triangolare segue da $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2u \cdot v + \|v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2$.

Per Cauchy e Schwarz ha senso definire l'**angolo** $\theta \in [0, \pi]$ tra due vettori non nulli tramite

$$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}.$$

Due vettori sono **ortogonali** ($u \perp v$) se $u \cdot v = 0$.

7.2 Basi ortogonali e ortonormali

DEFINIZIONE

Basi ortogonali e ortonormali

Una base $(v_1, \dots, v_n)$ di $\mathbb{R}^n$ è **ortogonale** se $v_i \cdot v_j = 0$ per $i \neq j$, **ortonormale** se inoltre $\|v_i\| = 1$ (cioè $v_i \cdot v_j = \delta_{ij}$). Vettori non nulli a due a due ortogonali sono automaticamente linearmente indipendenti.

PROPOSIZIONE

Se $(u_1, \dots, u_n)$ è una base ortonormale, le coordinate di v sono $v = \sum_i (v \cdot u_i) u_i$, cioè $[v]_B = (v \cdot u_1, \dots, v \cdot u_n)$; inoltre $\|v\|^2 = \sum (v \cdot u_i)^2$ (identità di Parseval).

DEFINIZIONE

Complemento ortogonale e proiezione

Per $W \leq \mathbb{R}^n$ il **complemento ortogonale** è $W^\perp = \{v \mid v \cdot w = 0 \ \forall w \in W\}$; vale $\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$ e $\dim W^\perp = n - \dim W$. Se $(u_1, \dots, u_k)$ è una base ortonormale di W , la **proiezione ortogonale** di v su W è $\text{proj}_W(v) = \sum_i (v \cdot u_i) u_i$, e $v - \text{proj}_W(v) \in W^\perp$. La proiezione su una retta $\text{Span}(u)$ è $(v \cdot u)/(u \cdot u) u$.

7.3 Il processo di Gram e Schmidt

TEOREMA

Gram e Schmidt

Da una base qualsiasi $(v_1, \dots, v_n)$ di $\mathbb{R}^n$ (o di un suo sottospazio) si ottiene una base ortonormale $(u_1, \dots, u_n)$ con $\text{Span}(u_1, \dots, u_k) = \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$ per ogni k , ponendo

$$w_1 = v_1, \quad w_k = v_k - \sum_{i < k} \frac{v_k \cdot w_i}{w_i \cdot w_i} w_i, \quad u_k = \frac{w_k}{\|w_k\|}.$$

Dimostrazione. Per induzione: w_k è v_k meno la proiezione ortogonale di v_k sullo spazio generato da $w_1, \dots, w_{k-1}$, quindi è ortogonale a ciascun w_i ($i < k$); è diverso da 0 perché altrimenti $v_k \in \text{Span}(v_1, \dots, v_{k-1})$, contro l'indipendenza.

ESEMPIO

Siano $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1)$, $v_3 = (0, 1, 1)$. Allora $u_1 = 1/\sqrt{2}(1, 1, 0)$; $w_2 = (1, 0, 1) - 1/2(1, 1, 0) = (1/2, -1/2, 1)$, $u_2 = 1/\sqrt{6}(1, -1, 2)$; $w_3 = (0, 1, 1) - 1/2(1, 1, 0) - 1/6(1, -1, 2) = (-2/3, 2/3, 2/3)$, $u_3 = 1/\sqrt{3}(-1, 1, 1)$. Si verifica $u_i \cdot u_j = \delta_{ij}$.

7.4 Matrici ortogonali e isometrie lineari

DEFINIZIONE

Matrice ortogonale

$Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ è **ortogonale** se $Q^T Q = I$, cioè $Q^{-1} = Q^T$. Gli insiemi $O(n)$ (matrici ortogonali) e $SO(n) = \{Q \in O(n) \mid \det Q = 1\}$ (matrici **speciali ortogonali**) sono gruppi rispetto al prodotto.

TEOREMA

Per $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ sono equivalenti: (a) Q è ortogonale; (b) le colonne di Q formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ (e così le righe); (c) Q conserva il prodotto scalare: $Qu \cdot Qv = u \cdot v$ per ogni u, v ; (d) Q conserva la norma: $\|Qv\| = \|v\|$. Inoltre $\det Q = \pm 1$.

Dimostrazione. (a) $\Leftrightarrow$ (b): l'elemento (i, j) di $Q^T Q$ è il prodotto scalare tra la colonna i e la colonna j di Q . (a) $\Rightarrow$ (c): $Qu \cdot Qv = u^T Q^T Q v = u^T v$. (c) $\Rightarrow$ (d) è il caso $u = v$; (d) $\Rightarrow$ (c) per la polarizzazione $u \cdot v = 1/2(\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2)$; (c) $\Rightarrow$ (a) applicando (c) ai vettori della base canonica. Infine $1 = \det(Q^T Q) = (\det Q)^2$.

Le applicazioni lineari f_Q con Q ortogonale si chiamano **isometrie lineari** (conservano distanze e angoli). Per $n = 2$ le matrici di $SO(2)$ sono le **rotazioni**

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix};$$

le matrici ortogonali con $\det = -1$ sono le **riflessioni** rispetto a una retta per l'origine. Le isometrie «affini» (con traslazioni) sono trattate al cap. 11.

7.5 Teorema spettrale per matrici simmetriche

TEOREMA

Teorema spettrale (reale)

Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ **simmetrica**. Allora tutti gli autovalori di A sono **reali**, gli autospazi relativi ad autovalori distinti sono **ortogonali** tra loro, e A è **diagonalizzabile con una matrice ortogonale**: esiste $Q \in O(n)$ (anche $Q \in SO(n)$) con $Q^T A Q = D$ diagonale. Equivalentemente, $\mathbb{R}^n$ ha una base ortonormale di autovettori di A .

Dimostrazione. (Ortogonalità degli autospazi.) Se $Av = \lambda v$, $Aw = \mu w$ con $\lambda \neq \mu$, allora $\lambda (v \cdot w) = Av \cdot w = v \cdot Aw = \mu (v \cdot w)$ (usando $A = A^T$), da cui $v \cdot w = 0$. La realtà degli autovalori e l'esistenza di una base ortonormale di autovettori si ottengono per induzione sulla dimensione: un autovettore v_1 unitario esiste (le radici del polinomio caratteristico sono reali); l'iperpiano $v_1^\perp$ è invariante rispetto ad A e la restrizione di A a $v_1^\perp$ è ancora simmetrica.

METODO

Diagonalizzazione ortogonale

Si calcolano autovalori e autospazi come al §6; in ogni autospazio si ortonormalizza una base (Gram e Schmidt); le basi di autospazi diversi sono già ortogonali. La matrice Q ha per colonne i versori ottenuti e $Q^T A Q = D$. Questo procedimento è alla base della **riduzione a forma canonica di coniche e quadriche** (cap. 12 e 13).

Calcolo vettoriale e geometria affine

Vettori, prodotti tra vettori, spazi affini e coordinate omogenee.

8.1 Vettori applicati e vettori liberi

DEFINIZIONE

Vettore applicato

Un **vettore applicato** $\overrightarrow{AB}$ è un segmento orientato con primo estremo (punto di applicazione) A e secondo estremo B . È caratterizzato da: **direzione** (la retta per A e B), **verso** (da A a B), **modulo** (lunghezza $\|\overrightarrow{AB}\|$) e punto di applicazione. Due vettori applicati sono **equipollenti** se hanno stessa direzione, verso e modulo.

DEFINIZIONE

Vettore libero

Un **vettore libero** è una classe di equipollenza di vettori applicati: si può pensare applicato in un punto qualsiasi. Indichiamo con V_2 e V_3 gli insiemi dei vettori liberi del piano e dello spazio.

La **somma** di vettori liberi si fa con la regola della punta e della coda o del parallelogramma ($\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, relazione di Chasles); il **prodotto per uno scalare** $k \cdot v$ ha la direzione di v , modulo $|k| \|v\|$ e verso concorde se $k > 0$, opposto se $k < 0$. Con tali operazioni V_2 e V_3 sono spazi vettoriali reali di dimensione 2 e 3. In algebra lineare la somma si esegue **per componenti** (non più col parallelogramma).

Un **versore** è un vettore di modulo 1. In un riferimento cartesiano ortogonale i versori degli assi sono $\mathbf{i} = (1,0,0)$, $\mathbf{j} = (0,1,0)$, $\mathbf{k} = (0,0,1)$: sono tre, e formano la base canonica.

TEOREMA

Teorema di scomposizione

Nel piano, fissati due vettori non paralleli e_1, e_2 , ogni vettore v si scrive in modo **unico** come $v = x e_1 + y e_2$. Nello spazio, fissati tre vettori non complanari e_1, e_2, e_3 , ogni v si scrive in modo unico come $v = x e_1 + y e_2 + z e_3$. I numeri (x,y) o (x,y,z) sono le **componenti** di v rispetto alla base.

(Il teorema è un caso particolare dell'esistenza e unicità delle coordinate rispetto a una base.) Il vettore $\overrightarrow{AB}$ ha componenti $B - A = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$ e la sua lunghezza è la **distanza** $d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$. Il **punto medio** di AB è $M = 1/2(A + B)$.

8.2 Prodotto scalare

Definito algebricamente al §7. Geometricamente

$$u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos \theta, \quad \theta = \angle uv.$$

Vale $u \cdot v = 0 \Leftrightarrow u \perp v$ (con u, v non nulli). La **componente (proiezione) di u lungo v** è $(u \cdot v) / \|v\|$ e il vettore proiezione è $(u \cdot v) / \|v\|^2 v$. I **coseni direttori** di $v = (l, m, n)$ sono $\cos \alpha = l / \|v\|$, $\cos \beta = m / \|v\|$, $\cos \gamma = n / \|v\|$ (angoli con gli assi), con somma dei quadrati = 1.

8.3 Prodotto vettoriale

DEFINIZIONE

Prodotto vettoriale

Per $u, v \in V_3$ il **prodotto vettoriale** $u \times v$ è il vettore tale che: (1) è ortogonale sia a u sia a v ; (2) ha modulo $\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \sin \theta$; (3) ha verso dato dalla regola della mano destra (la terna $(u, v, u \times v)$ è orientata come (i, j, k)). Se u, v sono paralleli (o uno è nullo) $u \times v = \mathbf{0}$. In componenti, con $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$:

$$u \times v = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1).$$

Proprietà: è **antisimmetrico** ($u \times v = -v \times u$), bilineare, non associativo; $u \times v = \mathbf{0} \Leftrightarrow u, v$ paralleli (linearmente dipendenti); $\|u \times v\|$ è l'**area del parallelogramma** di lati u, v (l'area del triangolo è la metà); identità di Lagrange $\|u \times v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - (u \cdot v)^2$; $a \times (b \times c) = b(a \cdot c) - c(a \cdot b)$. Serve per trovare un vettore **normale** a un piano (dati due vettori direzionali) o la direzione comune a due piani.

8.4 Prodotto misto

DEFINIZIONE

Prodotto misto

Il **prodotto misto** di $u, v, w \in V_3$ è lo scalare

$$[u, v, w] = u \cdot (v \times w) = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}.$$

Vale $[u, v, w] = [v, w, u] = [w, u, v] = -[v, u, w]$ (cambia segno scambiando due vettori). $|[u, v, w]|$ è il **volume del parallelepipedo** di spigoli u, v, w (il tetraedro ne è un sesto) e $[u, v, w] = 0 \Leftrightarrow u, v, w$ sono **complanari** (linearmente dipendenti). È lo strumento per verificare se quattro punti sono complanari: $[B - A, C - A, D - A] = 0$.

8.5 Spazi affini e sistemi di riferimento

DEFINIZIONE

Spazio affine

Uno **spazio affine** di dimensione n su $\mathbb{R}$ è un insieme A di **punti** insieme a uno spazio vettoriale V di dimensione n (la **giacitura**) e a un'applicazione che a ogni coppia di punti (P, Q) associa un vettore $\mathbf{PQ} \in V$ tale che: (i) fissato P , $Q \mapsto \mathbf{PQ}$ è biunivoca; (ii) $\mathbf{PQ} + \mathbf{QR} = \mathbf{PR}$ (Chasles). Si scrive $Q = P + \mathbf{PQ}$.

Si può vedere $\mathbb{R}^n$ come spazio affine di sé stesso (punti = vettori). Un **riferimento affine** è una coppia $R = (O; e_1, \dots, e_n)$ con O punto (origine) e (e_i) base di V : le **coordinate** di P sono le componenti di $\mathbf{OP}$. Il riferimento è **cartesiano ortogonale** se la base è ortonormale. Un sottospazio affine di dimensione k è $P_0 + W$ con $W \leq V$ sottospazio vettoriale di dimensione k (la sua giacitura): le **rette** ($k = 1$) e i **piani** ($k = 2$) sono i casi principali; due sottospazi affini sono **paralleli** se la giacitura dell'uno è contenuta in quella dell'altro.

8.6 Coordinate omogenee, punti impropri, spazio proiettivo

Per studiare in modo uniforme parallelismo e intersezione si **estende** lo spazio affine con i **punti impropri** (o «punti all'infinito»). Un punto del piano ha coordinate omogenee (x,y,t) definite a meno di un fattore non nullo: se $t \neq 0$ è il punto proprio di coordinate cartesiane $(x/t, y/t)$; per **passare dalle cartesiane alle omogenee si aggiunge 1** e il **punto improprio** $P_\infty = (x',y',0)$ corrisponde a una **direzione** (x',y') . Nello spazio le coordinate omogenee sono (x,y,z,t) e i punti impropri $(l,m,n,0)$ rappresentano le direzioni.

L'insieme dei punti propri e impropri è lo **spazio proiettivo** $\mathbb{P}^2$ (piano) o $\mathbb{P}^3$. Un'equazione cartesiana si **omogeneizza** sostituendo $x \rightarrow x/t$ ecc. e moltiplicando: ad esempio $ax + by + c = 0$ diventa $ax + by + ct = 0$ (e $t = 0$ è la **retta impropria**, formata da tutti i punti impropri). Due rette parallele del piano si incontrano in uno stesso punto improprio (la loro direzione): in $\mathbb{P}^2$ due rette distinte si intersecano sempre in esattamente un punto. Analogamente nello spazio il **piano improprio** è $t = 0$.

Geometria lineare nel piano

Rette del piano, posizioni reciproche, distanze e fasci di rette.

9.1 Rette nel piano e loro equazioni

Una retta del piano può essere individuata da: un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ e un vettore direttore $\mathbf{v} = (l, m)$ (o un vettore normale $\mathbf{n} = (a, b)$); oppure da due punti.

DEFINIZIONE

Equazioni di una retta

- **Cartesiana:** $ax + by + c = 0$ con $(a, b) \neq (0, 0)$; $\mathbf{n} = (a, b)$ è un vettore **normale** (ortogonale) alla retta e un vettore direttore è $(l, m) = (-b, a)$ (o $(b, -a)$).
- **Parametriche:**

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

(**vettoriale:** $P = P_0 + t \mathbf{v}$).

- **Simmetrica** (retta per P_0 parallela a $\mathbf{v}$): $(x - x_0)/l = (y - y_0)/m$ (se un denominatore è 0 si intende il numeratore uguale a 0).
- **Retta per P_0 perpendicolare a $\mathbf{n}$:** $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$.
- **Per due punti P_1, P_2 :**

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

ovvero

$$\det \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

- **Esplicita:** $y = mx + q$ con **coefficiente angolare** $m = \tan \alpha$ (non rappresenta le rette verticali $x = k$).

Il **passaggio** tra rappresentazioni è immediato: dalla cartesiana si ricava $(l, m) = (-b, a)$ e un punto; dalle parametriche si elimina t per ottenere la cartesiana.

9.2 Parallelismo, ortogonalità, angoli, intersezione

Siano $r: ax + by + c = 0$ e $r': a'x + b'y + c' = 0$ (con direttori $(l, m), (l', m')$).

- **Parallele:** $r \parallel r' \Leftrightarrow (a, b) \parallel (a', b') \Leftrightarrow ab' - a'b = 0$; **coincidenti** se anche c è proporzionale (rango della matrice completa = 1).
- **Ortogonalità:** $r \perp r' \Leftrightarrow aa' + bb' = 0 \Leftrightarrow ll' + mm' = 0$ (per i coefficienti angolari: $mm' = -1$).
- **Angolo θ tra le rette:**

$$\cos \theta = \frac{|aa' + bb'|}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a'^2 + b'^2}}.$$

- **Intersezione:** si risolve il sistema

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}.$$

Per Rouché e Capelli/Cramer: se $ab' - a'b \neq 0$ le rette sono incidenti in un unico punto; se $\text{rk } A = 1 < \text{rk}(A|B) = 2$ sono parallele distinte (si incontrano nel punto improprio comune); se $\text{rk} = 1$ per entrambe coincidono.

9.3 Distanze

- **Punto e retta:**

$$d(P_0, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

- **Rette parallele** $ax + by + c = 0$ e $ax + by + c' = 0$: $d = (|c - c'|)/(\sqrt{a^2 + b^2})$.
- **Bisettrici** dei due angoli formati da r, r' incidenti: i punti equidistanti,

$$\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm \frac{a'x + b'y + c'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}.$$

- **Proiezione ortogonale** di P_0 su r : intersezione di r con la retta per P_0 di direzione (a, b) ; il **simmetrico** P_0' rispetto a r è

$$P_0' = P_0 - 2 \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2} (a, b).$$

9.4 Fasci di rette

DEFINIZIONE

Fascio di rette

Il **fascio di rette** generato da due rette $r: \pi_1 = a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ed $s: \pi_2 = a_2x + b_2y + c_2 = 0$ è l'insieme delle rette di equazione $\lambda\pi_1 + \mu\pi_2 = 0$ con $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. Se r, s sono incidenti in P_0 è il **fascio proprio** di centro P_0 (tutte le rette per P_0); se $r \parallel s$ è il **fascio improprio** (tutte le rette parallele a r , di centro il punto improprio comune).

Dividendo per $\lambda \neq 0$ si scrive $\pi_1 + k\pi_2 = 0$ ($k \in \mathbb{R}$): tale scrittura non rappresenta s , che corrisponde a $k = \infty$ (cioè $\lambda = 0$). Il fascio proprio di centro $P_0 = (x_0, y_0)$ si scrive anche $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ con (a, b) variabile.

METODO

Retta di un fascio con una condizione

Per imporre il passaggio per un punto Q si sostituiscono le coordinate di Q in $\pi_1 + k\pi_2 = 0$ e si ricava k ; per imporre il parallelismo a una direzione (l, m) si impone $a' + b'm = 0$ sui coefficienti della retta generica; per imporre l'ortogonalità a una retta data si impone $aa' + bb' = 0$.

Esempio. Fascio di $x + y - 1 = 0$ e $x - y + 3 = 0$: $x + y - 1 + k(x - y + 3) = 0$. Retta del fascio per $Q = (0, 0)$: $-1 + 3k = 0 \Rightarrow k = 1/3$, cioè $4x + 2y = 0$, $2x + y = 0$.

Geometria lineare nello spazio

Piani e rette nello spazio, posizioni reciproche, fasci di piani, distanze e angoli.

10.1 Piani

DEFINIZIONE

Equazioni di un piano

- **Cartesiana:** $ax + by + cz + d = 0$ con $(a,b,c) \neq (0,0,0)$; $\mathbf{n} = (a,b,c)$ è un vettore **normale** al piano.
- **Per P_0 ortogonale a $\mathbf{n}$:** $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.
- **Parametriche / vettoriale** (per P_0 con giacitura generata da u, v non paralleli): $P = P_0 + s u + t v$, $s, t \in \mathbb{R}$. Si passa alla cartesiana eliminando s, t o con $\mathbf{n} = u \times v$.
- **Per tre punti non allineati P_1, P_2, P_3 :**

$$\det \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{pmatrix} = 0,$$

oppure normale $\mathbf{n} = (P_2 - P_1) \times (P_3 - P_1)$.

Un piano è anche individuato da una retta e un punto esterno, o da due rette incidenti o parallele (complanari).

10.2 Rette nello spazio

DEFINIZIONE

Equazioni di una retta nello spazio

La retta nello spazio si vede come **intersezione di due piani** non paralleli:

$$r: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases} \text{ (equazioni cartesiane),}$$

con vettore direttore $\mathbf{v} = (l, m, n) = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ (prodotto vettoriale delle normali). Altre forme:

- **Parametriche:** $x = x_0 + lt$, $y = y_0 + mt$, $z = z_0 + nt$ (per P_0 con direzione (l, m, n));
- **Simmetriche:**

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

(con la convenzione sui denominatori nulli);

- **Per due punti:**

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

La «retta perpendicolare a un vettore e passante per un punto» valida nel piano **non vale nello spazio**: ci sono infinite rette per un punto ortogonali a un vettore (formano un piano).

METODO

Da cartesiane a parametriche

Si risolve il sistema nelle tre incognite x, y, z lasciando libera una variabile (elemento generico): ad esempio

$$\begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$$

dà $z = 1$, $x = -y$: elemento generico $(-y, y, 1)$, quindi direzione $(-1, 1, 0)$ e punto $(0, 0, 1)$ (ponendo $y = 0$).

10.3 Posizioni reciproche

Dati i piani $\pi : ax + by + cz + d = 0$ e $\pi' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$, sia A la matrice 2×3 dei coefficienti e $(A|B)$ la completa.

- **Due piani:** $\text{rk } A = \text{rk}(A|B) = 1$ coincidenti; $\text{rk } A = 1, \text{rk}(A|B) = 2$ paralleli distinti; $\text{rk } A = 2$ incidenti in una retta. Perpendicolari se $aa' + bb' + cc' = 0$.
- **Retta e piano:** con r di direzione (l, m, n) e π di normale (a, b, c) : $r \parallel \pi \Leftrightarrow al + bm + cn = 0$ (se in più un punto di r appartiene a π , $r \subset \pi$); $r \perp \pi \Leftrightarrow (l, m, n) \parallel (a, b, c)$; altrimenti r e π si incontrano in un punto (si sostituiscono le parametriche di r nell'equazione di π).
- **Due rette:** r per P_1 di direzione v_1 e s per P_2 di direzione v_2 . **Parallele** se $v_1 \parallel v_2$ (coincidenti se $P_2 \in r$); **incidenti** (un punto in comune) se $v_1 \nparallel v_2$ e $[P_2 - P_1, v_1, v_2] = 0$; **sghembe** se $[P_2 - P_1, v_1, v_2] \neq 0$. **Due rette sono sghembe se non esiste alcun piano che le contiene.**

TEOREMA

Criterio per le rette sghembe in forma cartesiana

Siano $r : \pi_1 = \pi_2 = 0$ e $s : \pi_3 = \pi_4 = 0$. Se $\det$ della matrice 4×4 dei coefficienti (a_i, b_i, c_i, d_i) è diverso da 0, le rette **non hanno punti in comune**; sono quindi **sghembe** se inoltre non sono parallele (cioè se la matrice 4×3 dei soli coefficienti (a_i, b_i, c_i) ha rango 3), altrimenti sono parallele distinte. Se il determinante è 0 sono complanari (incidenti, parallele o coincidenti).

10.4 Fasci di piani

DEFINIZIONE

Fascio di piani

Il **fascio di piani** generato da $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e $\pi_2 : a_2x + \dots = 0$ è $\lambda\pi_1 + \mu\pi_2 = 0$, $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ (ovvero $\pi_1 + k\pi_2 = 0$, che esclude π_2). Se π_1, π_2 sono incidenti in una retta r (l'**asse**) è un **fascio proprio**: contiene tutti i piani per r ; se sono paralleli è un **fascio improprio**: tutti i piani paralleli a π_1 (asse: la retta impropria comune).

METODO

Piano per una retta con una condizione

Dato $r : \pi_1 = \pi_2 = 0$, il piano per r e per un punto Q si ottiene imponendo Q in $\lambda\pi_1 + \mu\pi_2 = 0$: $\lambda\pi_1(Q) + \mu\pi_2(Q) = 0$, cioè $(\lambda, \mu) = (\pi_2(Q), -\pi_1(Q))$. Il piano per r parallelo a una retta di direzione (l, m, n) si ottiene imponendo $al + bm + cn = 0$ sui coefficienti del piano generico del fascio; il piano per r ortogonale a un piano dato, imponendo $aa' + bb' + cc' = 0$.

10.5 Coordinate omogenee nello spazio, punti e rette improprie

Le coordinate omogenee dello spazio sono (x,y,z,t) ; il piano ha equazione omogenea $ax + by + cz + dt = 0$ e il **piano improprio** è $t = 0$. Un punto proprio ha $t \neq 0$ (coordinate $(x/t, y/t, z/t)$); un **punto improprio** è $(l,m,n,0)$, cioè una direzione.

METODO

Punto improprio di una retta (direzione)

Per la retta $r: \pi_1 = \pi_2 = 0$ si pongono le equazioni **omogenee** e $t = 0$: si risolve il sistema omogeneo $a_1x + b_1y + c_1z = 0, a_2x + b_2y + c_2z = 0$ (nelle tre incognite x,y,z), la cui soluzione è un solo vettore direzione $(l,m,n): P_\infty^r = (l,m,n,0)$. Ad esempio per $r: \{2x + 2y + 3z = -1, x + 3y + 2z = -2\}$ si risolve $2x + 2y + 3z = 0, x + 3y + 2z = 0$ ottenendo $(x,y,z) \propto (-5,-1,4)$ (verifica: $-10 - 2 + 12 = 0, -5 - 3 + 8 = 0$).

Le rette **parallele** hanno lo stesso punto improprio; due piani paralleli hanno la stessa **retta impropria** ($t = 0, ax + by + cz = 0$). Per le rette sghembe i punti impropri sono distinti e non hanno punti in comune nemmeno nello spazio proiettivo.

10.6 Distanze

- **Punto e piano:**

$$d(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

- **Punto e retta** (retta per A di direzione v):

$$d(P, r) = \frac{\|AP \times v\|}{\|v\|}.$$

- **Piani paralleli** $ax + by + cz + d = 0, ax + by + cz + d' = 0$: $(|d - d'|)/(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2})$. Una retta parallela a un piano: distanza di un suo punto dal piano.
- **Rette sghembe:**

$$d(r, s) = \frac{\| [P_2 - P_1, v_1, v_2] \|}{\|v_1 \times v_2\|}.$$

La **perpendicolare comune** è la retta incidente a entrambe e ortogonale a entrambe (direzione $v_1 \times v_2$): si trova come intersezione dei piani contenenti r (resp. s) e la direzione $v_1 \times v_2$.

10.7 Angoli

- **Due rette:**

$$\cos \theta = \frac{|v_1 \cdot v_2|}{\|v_1\| \|v_2\|}$$

(angolo acuto).

- **Due piani:** angolo tra le normali,

$$\cos \theta = \frac{|n \cdot n'|}{\|n\| \|n'\|}.$$

- **Retta e piano:**

$$\sin \theta = \frac{|v \cdot n|}{\|v\| \|n\|}.$$

10.8 Proiezioni e simmetrie

- **Proiezione ortogonale** di P su un piano $\pi : ax + by + cz + d = 0$:

$$H = P - \frac{ax_P + by_P + cz_P + d}{a^2 + b^2 + c^2} (a, b, c);$$

il **simmetrico** è

$$P' = P - 2 \frac{ax_P + by_P + cz_P + d}{a^2 + b^2 + c^2} (a, b, c).$$

- **Proiezione ortogonale** di P su una retta r (per A , direzione v):

$$H = A + \frac{\mathbf{AP} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v};$$

il simmetrico rispetto a r è $P' = 2H - P$.

- **Retta per P ortogonale a un piano:** direzione n . **Piano per P ortogonale a una retta:** normale v .

Isometrie

Trasformazioni che conservano le distanze nel piano e nello spazio, con la loro rappresentazione matriciale.

11.1 Isometrie del piano e dello spazio

DEFINIZIONE

Isometria

Un'isometria di $\mathbb{R}^n$ è una funzione $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ che conserva le distanze: $\|f(P) - f(Q)\| = \|P - Q\|$ per ogni P, Q . Le isometrie formano un gruppo rispetto alla composizione.

TEOREMA

Struttura delle isometrie

Le isometrie di $\mathbb{R}^n$ sono tutte e sole le applicazioni (affini)

$$f(x) = Qx + b, \quad Q \in O(n), b \in \mathbb{R}^n.$$

Se $\det Q = +1$ l'isometria è **diretta** (conserva l'orientazione), se $\det Q = -1$ è **inversa**. Le isometrie con $b = 0$ sono le isometrie **lineari**, cioè quelle che fissano l'origine.

Dimostrazione. Che $x \mapsto Qx + b$ conservi le distanze è chiaro: $\|Qx - Qy\| = \|x - y\|$. Viceversa, sia f un'isometria e $g(x) = f(x) - f(0)$: $g(0) = 0$ e g conserva le distanze, quindi le norme ($\|g(x)\| = \|x\|$) e, per polarizzazione, il prodotto scalare. Poiché $\|g(x+y) - g(x) - g(y)\|^2$ si sviluppa in termini di prodotti scalari che si semplificano, vale $g(x+y) = g(x) + g(y)$, e analogamente $g(ax) = ag(x)$: g è lineare e conserva il prodotto scalare, perciò la sua matrice Q è ortogonale (§7).

11.2 Interpretazione matriciale

L'isometria $x \mapsto Qx + b$ si scrive con una sola matrice nelle **coordinate omogenee**: aggiungendo la coordinata 1,

$$\begin{pmatrix} x' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice a blocchi ha dimensione $(n+1) \times (n+1)$, determinante $\det Q$, e la composizione di isometrie corrisponde al prodotto di tali matrici. La stessa formula con Q ortogonale descrive il **cambiamento di riferimento cartesiano ortogonale** $x = Qx' + b$, con b le coordinate della nuova origine e le colonne di Q le componenti dei nuovi versori degli assi: le coordinate nel nuovo riferimento sono $x' = Q^T(x - b)$.

11.3 Isometrie del piano: traslazioni, rotazioni, riflessioni

TEOREMA

Classificazione nel piano

Ogni isometria del piano è di uno dei seguenti tipi.

- **Diretta** ($\det Q = 1$, $Q = R_\theta$): **traslazione** se $\theta = 0$ (con $b \neq 0$), **rotazione** di angolo $\theta \neq 0$ attorno a un unico punto fisso C se $\theta \neq 0$.
- **Inversa** ($\det Q = -1$): **riflessione** (simmetria assiale) rispetto a una retta, oppure **glissoriflessione** (riflessione composta con una traslazione parallela all'asse).

- **Traslazione** di vettore b : $x \mapsto x + b$, senza punti fissi.
- **Rotazione** di angolo θ (antiorario) attorno all'origine:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

con $\det R_\theta = 1$, $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$. Attorno a un centro C : $x \mapsto C + R_\theta(x - C) = R_\theta x + (I - R_\theta)C$. Il centro di $x \mapsto R_\theta x + b$ ($\theta \neq 0$) si trova risolvendo $(I - R_\theta)C = b$.

- **Riflessione** rispetto alla retta per l'origine di direzione angolare α :

$$S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

($\det = -1$, $S_\alpha^2 = I$); equivalentemente $I - 2 \mathbf{nn}^T$ con $\mathbf{n}$ versore normale alla retta. Rispetto a una retta qualsiasi $ax + by + c = 0$:

$$P' = P - 2 \frac{ax_P + by_P + c}{a^2 + b^2} (a, b).$$

- **Simmetria centrale** di centro C : $x \mapsto 2C - x$ (è la rotazione di π attorno a C).

ESEMPIO

La rotazione di 90° attorno a $C = (1,0)$ è $f(x,y) = C + R_{90^\circ}((x,y) - C) = (1,0) + (-y, x - 1) = (1 - y, x - 1)$; infatti $f(1,0) = (1,0)$. La riflessione di $P = (0,0)$ rispetto a $r: x + y - 2 = 0$ è $P' = (0,0) - 2(-2)/2(1,1) = (2,2)$, e il punto medio $(1,1)$ sta su r .

METODO

Punto simmetrico rispetto a una retta (senza formule)

Il simmetrico P_2 di P_1 rispetto alla retta r è caratterizzato da due condizioni: (1) il **punto medio** $M = 1/2(P_1 + P_2)$ sta su r ; (2) il vettore $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ è **ortogonale** a r (parallelo al vettore normale). Si ottiene un sistema nelle coordinate di P_2 .

11.4 Isometrie dello spazio

In $\mathbb{R}^3$, per $Q \in O(3)$ vale $\det Q = \pm 1$ e Q ha sempre l'autovalore reale $\det Q$ (se $\det Q = 1$) o -1 (se $\det Q = -1$).

- **Rotazione** attorno a un asse per l'origine di versore u e angolo θ (formula di Rodrigues):

$$R_{u,\theta} = \cos \theta I + \sin \theta [u]_x + (1 - \cos \theta) u u^T, \quad [u]_x = \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

In particolare attorno all'asse z :

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'asse è $\text{Ker}(Q - I)$ e l'angolo si ricava da $\text{tr } Q = 1 + 2\cos \theta$.

- **Riflessione** rispetto a un piano $\pi: ax + by + cz + d = 0$:

$$P' = P - 2 \frac{ax_P + by_P + cz_P + d}{a^2 + b^2 + c^2} (a, b, c);$$

per il piano per l'origine di normale unitaria $\mathbf{n}$ la matrice è $I - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^T$ ($\det = -1$).

- **Simmetria centrale** (rispetto a un punto C): $x \mapsto 2C - x$, con $Q = -I$ ($\det = -1$).
- **Traslazione** $x \mapsto x + b$.

TEOREMA

Classificazione nello spazio

Ogni isometria $x \mapsto Qx + b$ di $\mathbb{R}^3$ è di uno dei tipi: **diretta** ($\det Q = 1$): identità, traslazione, **rotazione** attorno a una retta (asse), o **rototraslazione** (rotazione attorno a un asse composta con una traslazione parallela all'asse; si ottiene scomponendo b nella parte parallela e nella parte ortogonale all'asse, e quest'ultima si assorbe spostando l'asse); **inversa** ($\det Q = -1$): **riflessione** rispetto a un piano, **glissoriflessione** (riflessione più traslazione parallela al piano), **simmetria centrale**, o **rotoriflessione** (rotazione di un angolo attorno a un asse composta con la riflessione nel piano ortogonale all'asse; comprende la simmetria centrale per $\theta = \pi$).

ESEMPIO

$f(x, y, z) = (-y, x, z + 1)$ è una rototraslazione: rotazione di 90° attorno all'asse z composta con la traslazione di 1 lungo z (moto elicoidale); la matrice omogenea è

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Coniche

Rappresentazione matriciale, classificazione, forma canonica, proprietà geometriche e fasci di coniche.

12.1 Definizione e rappresentazione matriciale

DEFINIZIONE

Conica

Una **conica** è il luogo dei punti (x,y) del piano che soddisfano un'equazione di secondo grado

$$F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \quad (a_{11}, a_{12}, a_{22}) \neq (0,0,0).$$

In coordinate omogenee (x,y,t) l'equazione è $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}t^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xt + 2a_{23}yt = 0$, cioè $\mathbf{x}^T B \mathbf{x} = 0$ con

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix},$$

dove B (simmetrica 3×3) è la **matrice associata alla conica** e A è la sottomatrice 2×2 delle **prime due righe e colonne** di B (la parte quadratica).

12.2 Invarianti ortogonali

Con un cambio di riferimento cartesiano ortogonale $\mathbf{x} = Q\mathbf{x}' + \mathbf{b}$ la matrice di una conica diventa $B' = T^T B T$ con

$$T = \begin{pmatrix} Q & \mathbf{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e $A' = Q^T A Q$. Poiché $\det T = \det Q = \pm 1$ e $Q^T = Q^{-1}$, restano invariati (a meno di un fattore moltiplicativo comune a tutta l'equazione):

$$\det B, \quad \det A, \quad \text{tr } A$$

detti **invarianti ortogonali** (insieme ai ranghi $\text{rk } A, \text{rk } B$ e agli autovalori di A , che sono le radici di $\lambda^2 - \text{tr } A \lambda + \det A = 0$). Un ulteriore (semi)invariante utile è $K = (a_{22}a_{33} - a_{23}^2) + (a_{11}a_{33} - a_{13}^2)$, somma dei minori principali di ordine 2 di B che coinvolgono la terza riga/colonna.

12.3 Coniche riducibili e irriducibili

DEFINIZIONE

Conica riducibile

Una conica è **riducibile** (o **spezzata**) se il polinomio F si scompone nel prodotto di due polinomi di primo grado, $F = HL$: il suo grafico è l'unione di due rette (distinte o coincidenti, reali o immaginarie). Altrimenti è **irriducibile**.

TEOREMA

Sia B la matrice associata a una conica C . Allora:

- $\text{rk } B = 3$ ($\det B \neq 0$) $\Leftrightarrow C$ **irriducibile**;
- $\text{rk } B = 2 \Leftrightarrow C$ è spezzata in **due rette distinte**;
- $\text{rk } B = 1 \Leftrightarrow C$ è spezzata in **due rette coincidenti** (retta doppia).

Questo si spiega con i **punti singolari**: P_0 è singolare se ogni retta per P_0 che incontra la conica in un altro punto è contenuta nella conica, e ciò accade $\Leftrightarrow Bx_0 = 0$. Le coniche irriducibili non hanno punti singolari ($\text{rk } B = 3$, il sistema $Bx = 0$ ha solo la soluzione nulla); per due rette distinte l'unico punto singolare è la loro intersezione ($\text{rk } B = 2$); per una retta doppia tutti i punti della retta sono singolari ($\text{rk } B = 1$).

OSSERVAZIONE

Sottoclassificazione delle coniche riducibili

Con $\text{rk } B = 2$: se $\det A < 0$ le due rette sono reali **incidenti**; se $\det A > 0$ sono immaginarie coniugate, con un solo punto reale (la loro intersezione); se $\det A = 0$ sono **parallele**, reali e distinte se $K < 0$, immaginarie se $K > 0$. Con $\text{rk } B = 1$: retta doppia.

12.4 Classificazione delle coniche irriducibili

Una retta incontra una conica irriducibile in due punti (distinti, coincidenti o complessi coniugati). In particolare ogni conica irriducibile ha **due punti impropri**, le cui direzioni sono le soluzioni di $a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 = 0$.

TEOREMA

Classificazione

Sia C irriducibile ($\det B \neq 0$). Allora:

- **Ellisse** $\Leftrightarrow \det A > 0$ (due punti impropri complessi coniugati): **reale** se $\text{tr } A \cdot \det B < 0$, **immaginaria** (nessun punto reale) se $\text{tr } A \cdot \det B > 0$. Caso particolare: **circonferenza** se $a_{11} = a_{22} \neq 0$ e $a_{12} = 0$.
- **Parabola** $\Leftrightarrow \det A = 0$ (due punti impropri coincidenti, quindi tangente alla retta impropria).
- **Iperbole** $\Leftrightarrow \det A < 0$ (due punti impropri reali distinti, le direzioni degli asintoti): **equilatera** se $\text{tr } A = 0$ (asintoti ortogonali).

$\det B$	$\det A$	ALTRO	CONICA
$\neq 0$	> 0	$\text{tr } A \cdot \det B < 0$	ellisse reale
$\neq 0$	> 0	$\text{tr } A \cdot \det B > 0$	ellisse immaginaria
$\neq 0$	$= 0$		parabola
$\neq 0$	< 0	$\text{tr } A \neq 0$	iperbole
$\neq 0$	< 0	$\text{tr } A = 0$	iperbole equilatera
$= 0$	< 0	$\text{rk } B = 2$	due rette reali incidenti
$= 0$	> 0	$\text{rk } B = 2$	due rette immaginarie (un punto reale)
$= 0$	$= 0$	$\text{rk } B = 2$	rette parallele (reali se $K < 0$)
$= 0$		$\text{rk } B = 1$	retta doppia

12.5 Centro, assi, riduzione a forma canonica

Il **centro** di una conica a centro ($\det A \neq 0$: ellisse, iperbole) è l'unico punto $C = (x_C, y_C)$ soluzione del sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_C + a_{12}y_C + a_{13} = 0 \\ a_{12}x_C + a_{22}y_C + a_{23} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A C = -(a_{13}, a_{23})^T.$$

La parabola non ha centro (il centro è improprio). Gli **assi di simmetria** dell'ellisse e dell'iperbole sono le rette per il centro parallele agli **autovettori** di A (che sono ortogonali tra loro perché A è simmetrica).

METODO

Riduzione a forma canonica (ellisse e iperbole)

1. Si calcolano gli **autovalori** λ_1, λ_2 di A (radici di $\lambda^2 - \text{tr } A \lambda + \det A$) e gli autovettori **ortonormali** u_1, u_2 (scelti con $\det(u_1 | u_2) = 1$).
2. Si calcola il **centro** C .
3. Con il riferimento di origine C e assi u_1, u_2 (cioè $x = C + Q X$ con $Q = (u_1 | u_2)$), l'equazione diventa

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{\det B}{\det A} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = \gamma, \quad \gamma = -\frac{\det B}{\det A}.$$

Se ellisse reale si ha $X^2/a^2 + Y^2/b^2 = 1$ con $a^2 = \gamma/\lambda_1$, $b^2 = \gamma/\lambda_2$ (semiassi a, b , allineati con u_1, u_2).

METODO

Riduzione a forma canonica (parabola)

Se $\det A = 0$ gli autovalori di A sono 0 e $\text{tr } A$. Si prende come asse X la direzione dell'autovettore relativo all'autovalore 0 (**direzione dell'asse** della parabola, cioè del punto improprio) e come asse Y l'altro autovettore (relativo a $\text{tr } A$). Nel riferimento che ha come origine il **vertice** V la conica è

$$\text{tr } A Y^2 + 2\sqrt{-(\det B)/(\text{tr } A)} X = 0 \quad (\text{a meno del segno di } X).$$

Asse della parabola: è la **polare** del punto improprio della direzione ortogonale all'asse, cioè la retta $v_1(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + v_2(a_{12}x + a_{22}y + a_{23}) = 0$ dove (v_1, v_2) è l'autovettore relativo a $\text{tr } A$. Il **vertice** è l'intersezione dell'asse con la conica.

ESEMPIO

Un'iperbole

$$x^2 + 4xy + y^2 - 1 = 0:$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\det B = 3,$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$\det A = -3 < 0$: iperbole, $\text{tr } A = 2 \neq 0$ (non equilatera). Autovalori di A : 3 (autovettore $(1,1)$) e -1 (autovettore $(1,-1)$). Centro: $A C = 0 \Rightarrow C = (0,0)$. $\gamma = -\det B/\det A = 1$: $3X^2 - Y^2 = 1$, cioè $X^2/(1/3) - Y^2 = 1$ con asse trasverso lungo $(1,1)$: $a = 1/\sqrt{3}$, $b = 1$.

ESEMPIO

Un'ellisse

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 - 8 = 0:$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix},$$

$$\det B = -64,$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$\det A = 8 > 0$, $\text{tr } A = 6$, $\text{tr } A \cdot \det B < 0$: ellisse reale. Autovalori 4 (con (1,1)) e 2 (con (1,-1)); $\gamma = 8$: $4X^2 + 2Y^2 = 8$, cioè $X^2/2 + Y^2/4 = 1$: semiassi $\sqrt{2}$ lungo (1,1) e 2 lungo (1,-1).

ESEMPIO

Una parabola

$$(x+y)^2 = x-y, \text{ cioè } x^2 + 2xy + y^2 - x + y = 0:$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1/2 \\ 1 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\det B = -1 \neq 0,$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$\det A = 0$: parabola, $\text{tr } A = 2$. L'autovettore per 0 è (1,-1) (direzione dell'asse), quello per 2 è (1,1). Asse: polare di (1,1,0): $(x+y-1/2) + (x+y+1/2) = 0 \Rightarrow x+y=0$. Vertice: $x=-y$ nella conica dà $0 = x-y = 2x$, quindi $V = (0,0)$. Forma canonica: $2Y^2 + 2\sqrt{(1/2)} X = 0$, ossia $Y^2 = -\sqrt{2}/2 X$ con X lungo (1,-1)/ $\sqrt{2}$ (orientandolo al contrario, $Y^2 = \sqrt{2}/2 X$), parametro $p = \sqrt{2}/4$ in $Y^2 = 2pX$.

12.6 Studio geometrico: fuochi, direttrici, eccentricità

Ellisse. Luogo dei punti per cui è costante ($= 2a$) la somma delle distanze da due punti fissi, i **fuochi** F_1, F_2 . In forma canonica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

con $a \geq b > 0$:

- vertici $(\pm a, 0), (0, \pm b)$; **fuochi** $(\pm c, 0)$ con $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ (se $b > a$ i fuochi sono su y : $(0, \pm c)$, $c = \sqrt{b^2 - a^2}$);
- **eccentricità** $e = c/a \in [0, 1)$ ($e = 0$ è la circonferenza);
- **direttrici**

$$x = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{a^2}{c};$$

proprietà focale:

$$\frac{|PF|}{d(P, \text{direttrice corrispondente})} = e.$$

La relazione $c^2 = a^2 - b^2$ si ottiene da $\sqrt{((x-c)^2 + y^2)} + \sqrt{((x+c)^2 + y^2)} = 2a$, isolando e elevando al quadrato due volte: $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$ e si pone $b^2 = a^2 - c^2$.

Iperbole. Luogo dei punti per cui è costante ($= 2a$) il valore assoluto della differenza delle distanze da due fuochi. In forma canonica

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1:$$

- vertici $(\pm a, 0)$; **fuochi** $(\pm c, 0)$ con $c = \sqrt{a^2 + b^2}$;
- **eccentricità** $e = c/a > 1$; **direttrici** $x = \pm a^2/c$;
- **asintoti** $y = \pm b/a x$: rette cui i rami si avvicinano indefinitamente senza toccarle (sono le rette per il centro con le direzioni dei punti impropri); sono ortogonali se $a = b$ (**iperbole equilatera**, $e = \sqrt{2}$). Per

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

i fuochi sono su y . L'iperbole equilatera riferita agli asintoti ha equazione $xy = k$.

Parabola. Luogo dei punti equidistanti da un punto fisso, il **fuoco** F , e da una retta fissa, la **direttrice** d ($e = 1$). In forma canonica $y^2 = 2px$ ($p \neq 0$): vertice nell'origine, asse x , **fuoco** $F = (p/2, 0)$, **direttrice** $x = -p/2$. (Con la notazione $\beta Y^2 = 2\gamma X$ si ha $p = \gamma/\beta$.) Per $x^2 = 2py$ fuoco $(0, p/2)$, direttrice $y = -p/2$.

Per ottenere fuochi, vertici, direttrici e asintoti di una conica **non** in forma canonica si calcolano tali elementi nel riferimento canonico (X, Y) e si riportano nelle coordinate originali con $x = C + Q X$.

12.7 Circonferenze

DEFINIZIONE

Circonferenza

La **circonferenza** di centro $C = (\alpha, \beta)$ e raggio $r > 0$ è il luogo dei punti a distanza r da C : $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$, ovvero $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ con $a = -2\alpha$, $b = -2\beta$, $c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2$. Dall'equazione generale: centro $(-a/2, -b/2)$, raggio $r = \sqrt{a^2/4 + b^2/4 - c}$ (reale solo se il radicando è > 0).

Una conica $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + \dots$ è una circonferenza (reale o immaginaria) se $a_{11} = a_{22} \neq 0$ e $a_{12} = 0$. Per **tre punti** non allineati:

$$\det \begin{pmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Una retta e una circonferenza sono secanti, tangenti o esterne secondo che $d(C, r) <, =, > r$. L'**asse radicale** di due circonferenze γ_1, γ_2 è la retta $\gamma_1 - \gamma_2 = 0$; il fascio $\gamma_1 + k\gamma_2 = 0$ è un fascio di circonferenze.

12.8 Tangenti

TEOREMA

Tangente in un punto (formule di sdoppiamento)

Se $P_0 = (x_0, y_0)$ appartiene alla conica $\mathbf{x}^T B \mathbf{x} = 0$ ed è un punto non singolare, la **retta tangente** in P_0 ha equazione

$$(x_0, y_0, 1) B (x, y, 1)^T = 0,$$

cioè $a_{11}x_0x + a_{12}(x_0y + y_0x) + a_{22}y_0y + a_{13}(x + x_0) + a_{23}(y + y_0) + a_{33} = 0$ (si «sdoppiano» i termini: $x^2 \rightarrow x_0x$, $2x \rightarrow x + x_0$, $2xy \rightarrow x_0y + y_0x$, ...).

Per un punto P **esterno**, la stessa formula con P al posto di P_0 dà la **polare** di P , che incontra la conica nei punti di tangenza T_1, T_2 : le tangenti da P sono PT_1, PT_2 . In alternativa, una retta è tangente se sostituita nella conica fornisce un'equazione di secondo grado con **discriminante nullo**; per la circonferenza, se $d(C, r) = r$.

ESEMPIO

Tangente a $y^2 = 4x$ in $P_0 = (1, 2)$: sdoppiando, $y_0y = 2(x + x_0) \Rightarrow 2y = 2(x + 1)$, cioè $y = x + 1$. Tangente alla circonferenza $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ (centro $(1, 2)$, raggio 3) in $P_0 = (4, 2)$: $4x + 2y - (x + 4) - 2(y + 2) - 4 = 0 \Rightarrow 3x - 12 = 0$, cioè $x = 4$.

12.9 Fasci di coniche

DEFINIZIONE

Fascio di coniche

Siano $C_1 : F_1 = 0$ e $C_2 : F_2 = 0$ due coniche. Il **fascio di coniche** da esse generato è l'insieme delle coniche $\lambda F_1 + \mu F_2 = 0$ con $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, ovvero $F_1 + kF_2 = 0$ ($k \in \mathbb{R}$; $k = \infty$ è C_2). I punti comuni a C_1 e C_2 (in generale **quattro**, reali o complessi, eventualmente coincidenti) sono i **punti base** e sono comuni a tutte le coniche del fascio: per quattro punti passano infinite coniche, quindi uno stesso fascio.

Le coniche **spezzate** del fascio si trovano imponendo $\det B_k = 0$, dove $B_k = B_1 + kB_2$ ($\det B_k$ è un polinomio di grado ≤ 3 in k , quindi al più tre valori): corrispondono alle **tre coppie di rette** che congiungono a due a due i quattro punti base ($AB \cdot CD$, $AC \cdot BD$, $AD \cdot BC$). Quindi, per **trovare il fascio per quattro punti** A, B, C, D (nessuna terna allineata) basta scrivere due delle tre coniche spezzate come prodotto di due rette. Una conica del fascio è determinata imponendo il passaggio per un quinto punto P (si sostituisce P e si ricava k); per cinque punti (nessuna quaterna allineata) passa **una sola** conica.

ESEMPIO

Quattro punti base

Siano $O = (0, 0)$, $A = (-2, 0)$, $B = (0, -2)$, $C = (-2, -6)$. Le coniche spezzate $OA \cdot BC$ e $OB \cdot AC$ sono $\Gamma_1 : y(2x - y - 2) = 0$ (infatti $OA : y = 0$ e $BC : 2x - y - 2 = 0$) e $\Gamma_2 : x(x + 2) = 0$. Il fascio è

$$\Gamma_1 + k \Gamma_2 : 2xy - y^2 - 2y + k(x^2 + 2x) = 0.$$

La matrice associata B_k ha righe $(k, 1, k)$, $(1, -1, -1)$, $(k, -1, 0)$ e $\det B_k = k(k - 3)$: coniche spezzate per $k = 0$ (Γ_1), $k = \infty$ (Γ_2) e $k = 3$: $3x^2 + 2xy - y^2 + 6x - 2y = (3x - y)(x + y + 2) = 0$ (le rette OC e AB). Al variare di k : $\det A = -k - 1$, quindi iperbole se $k > -1$ ($k \neq 0, 3$), parabola se $k = -1$, ellisse se $k < -1$ (reale: $\text{tr } A \cdot \det B = (k - 1)k(k - 3) < 0$); iperbole equilatera per $\text{tr } A = k - 1 = 0$, cioè $k = 1$. La conica del fascio per $P = (1, 1)$: $2 - 1 - 2 + k(1 + 2) = 0 \Rightarrow k = 1/3$.

Quadriche

Equazioni, classificazione e forme canoniche delle superfici di secondo grado.

13.1 Equazioni e rappresentazione matriciale

DEFINIZIONE

Quadrica

Una **quadrica** è il luogo dei punti (x,y,z) dello spazio che soddisfano un'equazione di secondo grado

$$F = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

In forma matriciale $F = \mathbf{x}^T B \mathbf{x}$ con $\mathbf{x} = (x,y,z,1)^T$, $B \in \mathbb{R}^{4,4}$ simmetrica e $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ la sottomatrice delle prime tre righe e colonne (parte quadratica). Come per le coniche, $\det B$, $\det A$, $\text{tr } A$, $\text{rk } A$, $\text{rk } B$ e gli autovalori di A sono invarianti per cambi di riferimento cartesiano ortogonale. Il **centro** (se $\text{rk } A = 3$) è la soluzione di $A \mathbf{C} = -(a_{14}, a_{24}, a_{34})^T$. Il **piano tangente** in un punto P_0 non singolare della quadrica è $(x_0, y_0, z_0, 1) B (x, y, z, 1)^T = 0$.

METODO

Riduzione a forma canonica

1. Si diagonalizza la parte quadratica A con una base **ortonormale** di autovettori (teorema spettrale), ottenendo autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (alcuni possono essere nulli).
2. Nel nuovo riferimento (rotazione) si **completano i quadrati** per eliminare i termini lineari con una traslazione. Per le quadriche a centro ($\det A \neq 0$) si ottiene

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + \frac{\det B}{\det A} = 0.$$

13.2 Classificazione

Siano λ_i gli autovalori non nulli di A e, nel caso $\det A \neq 0$, $d = \det B / \det A$.

rk B	rk A	FORMA CANONICA	QUADRICA
4	3	$\lambda_i X_i^2 + d = 0, d \neq 0$: segni di $-\lambda_i/d$ (negativi: 0 / 1 / 2 / 3)	ellissoide reale / iperboloide a una falda (iperbolico) / iperboloide a due falde (ellittico) / ellissoide immaginario
4	2	$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + 2\mu Z = 0$	paraboloide ellittico se $\lambda_1 \lambda_2 > 0$; iperbolico se $\lambda_1 \lambda_2 < 0$
3	3	$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 = 0$	cono (reale se i segni non sono tutti uguali; se tutti uguali, un solo punto reale: cono immaginario)
3	2	$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + c = 0$	cilindro ellittico (reale o immaginario) se $\lambda_1 \lambda_2 > 0$; iperbolico se $\lambda_1 \lambda_2 < 0$
3	1	$\lambda X^2 + 2\mu Y = 0$	cilindro parabolico
2	2	$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = 0$	due piani incidenti (reali se $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, altrimenti immaginari)
2	1	$\lambda X^2 + c = 0$	due piani paralleli (reali se $\lambda c < 0$)
1	1	$\lambda X^2 = 0$	piano doppio

13.3 Ellissoidi, paraboloidi, iperboloidi

- **Ellissoide:**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

semiassi a, b, c . Se due semiassi coincidono è di rotazione; se tutti e tre, è una **sfera**

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = r^2.$$

- **Iperboloide a una falda** (iperbolico):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

superficie connessa e **rigata** (per ogni punto passano due rette contenute nella superficie); le sezioni con piani $z = h$ sono ellissi, quelle con piani contenenti l'asse z sono iperboli.

- **Iperboloide a due falde** (ellittico):

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

due falde con $|z| \geq c$.

- **Paraboloide ellittico:**

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

(sezioni orizzontali ellissi, verticali parabole).

- **Paraboloide iperbolico** («sella»):

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2},$$

rigato; sezioni orizzontali iperboli, verticali parabole.

13.4 Coni e cilindri

- **Cono** (quadrico):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2},$$

con vertice nell'origine; è l'unione delle rette per il vertice che passano per una conica (direttrice). Se $a = b$ è un cono circolare.

- **Cilindro**:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(ellittico),

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(iperbolico), $y^2 = 2px$ (parabolico): equazioni in cui manca una variabile; sono unioni di rette parallele (generatrici) che passano per una conica nel piano coordinato.

Le **sezioni piane** di una quadrica sono sempre coniche (eventualmente degeneri); sezionando una quadrica con piani paralleli a un piano fissato si ottengono coniche dello stesso tipo (per le quadriche a centro, simili).

ESEMPIO

Riduzione di un ellissoide

$2x^2 + 2y^2 + 2xy + 3z^2 = 6$: la matrice A della parte quadratica ha righe $(2,1,0)$, $(1,2,0)$, $(0,0,3)$ e autovalori 1 (autovettore $(1,-1,0)$), 3 (autovettore $(1,1,0)$) e 3 (autovettore $(0,0,1)$). Non ci sono termini lineari (centro nell'origine, $\det B = -54$, $d = \det B / \det A = -54/9 = -6$). La forma canonica è $X^2 + 3Y^2 + 3Z^2 = 6$, cioè

$$\frac{X^2}{6} + \frac{Y^2}{2} + \frac{Z^2}{2} = 1:$$

ellissoide di rotazione con semiassi $\sqrt{6}$ (lungo $(1,-1,0)$), $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$.

Formulario riassuntivo

Sintesi delle procedure e delle formule principali della dispensa.

14.1 Spazi vettoriali e applicazioni lineari

OGGETTO	PROCEDURA
Cartesiana $\rightarrow$ elemento generico	si isolano le variabili; le libere vanno nel vettore
Elemento generico $\rightarrow$ generatori	si pone a turno una libera = 1, le altre = 0
Generatori $\rightarrow$ cartesiana	matrice Z (generatori per riga + riga delle incognite): $\det = 0$ o riduzione
Legge $\rightarrow$ matrice	$f(e_j)$ in colonna
Immagini (base non canonica) $\rightarrow$ legge	sistema sui coefficienti della C.L. di (x,y,z)
$\dim \operatorname{Im} f$	$\operatorname{rk} M(f)$; base: colonne L.I.; cartesiana: matrice Z
$\dim \operatorname{Ker} f$	$\dim V - \operatorname{rk} M(f)$; base e cartesiana: sistema $M(f)X = 0$
Controimmagine di w	sistema $M(f)X = w$ (Rouché e Capelli); $v_0 + \operatorname{Ker} f$
Cambio di base	$M' = Q^{-1}MP$; endomorfismi: $M' = P^{-1}MP$
Grassmann	$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$
Nucleo e immagine	$\dim V = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$

14.2 Autovalori

OGGETTO	FORMULA
Polinomio caratteristico	$P(T) = \det(M(f) - T I)$
Autovalori	radici di $P(T)$; m_λ = esponente
Autospazio	$V_\lambda = \operatorname{Ker}(M(f) - \lambda I)$, $g_\lambda = \dim V_\lambda$, $1 \leq g_\lambda \leq m_\lambda$
Semplice/diagonalizzabile	$\sum g_\lambda = n$ (tutti i $\lambda \in \mathbb{K}$ e $g_\lambda = m_\lambda$)
D (diagonalizzata)	autovalori sulla diagonale, ciascuno m_λ volte
P (diagonalizzante)	basi degli autospazi in colonna, nello stesso ordine di D ; $P^{-1}AP = D$
Simmetriche reali	diagonalizzabili con Q ortogonale ($Q^T A Q = D$)

14.3 Geometria nel piano e nello spazio

OGGETTO	FORMULA
Retta per P_0 parallela a (l,m)	$(x - x_0)/l = (y - y_0)/m$
Retta per due punti	$(x - x_1)/(x_2 - x_1) = (y - y_1)/(y_2 - y_1)$
Retta nello spazio (parallela a (l,m,n))	$(x - x_0)/l = (y - y_0)/m = (z - z_0)/n$
Rette sghembe	$\det_{4 \times 4} \neq 0$ e $\text{rk}(a_i, b_i, c_i) = 3$; oppure $[P_2 - P_1, v_1, v_2] \neq 0$
Fascio di rette/piani	$\pi_1 + k\pi_2 = 0$ ($k = \infty$: π_2)
Normale al piano per tre punti	$(P_2 - P_1) \times (P_3 - P_1)$
Distanza di un punto da una retta (piano)	$(ax_0 + by_0 + c)/(\sqrt{a^2 + b^2})$
Distanza di un punto da un piano	$(ax_0 + by_0 + cz_0 + d)/(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2})$
Distanza di un punto da una retta (spazio)	$\ \mathbf{AP} \times \mathbf{v}\ /\ \mathbf{v}\ $
Distanza rette sghembe	$ [P_2 - P_1, v_1, v_2] /\ v_1 \times v_2\ $
Riflessione di P in π	$P - 2(\mathbf{n} \cdot P + d)/\ \mathbf{n}\ ^2 \mathbf{n}$

14.4 Coniche

OGGETTO	FORMULA
Matrici	$B = (a_{ij})_{3 \times 3}$ simmetrica, A = prime due righe/colonne
Irriducibile / riducibile	$\det B \neq 0$ / $\det B = 0$ ($\text{rk } B = 2$: rette distinte; $\text{rk } B = 1$: coincidenti)
Ellisse	$\det A > 0$ (reale se $\text{tr } A \cdot \det B < 0$); circonferenza: $a_{11} = a_{22} \neq 0$, $a_{12} = 0$
Parabola	$\det A = 0$
Iperbole	$\det A < 0$ (equilatera: $\text{tr } A = 0$)
Centro	$A \mathbf{C} = -(a_{13}, a_{23})^T$
Forma canonica (a centro)	$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = -\det B / \det A$ (λ_i = autovalori di A)
Forma canonica (parabola)	$\text{tr } A \cdot Y^2 + 2\sqrt{-\det B / \text{tr } A} X = 0$
Ellisse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$	$c^2 = a^2 - b^2$, $e = c/a < 1$, direttrici $x = \pm a^2/c$
Iperbole $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$	$c^2 = a^2 + b^2$, $e = c/a > 1$, asintoti $y = \pm b/ax$
Parabola $y^2 = 2px$	fuoco $(p/2, 0)$, direttrice $x = -p/2$
Circonferenza	$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$: centro $(-a/2, -b/2)$, $r^2 = (a^2 + b^2)/4 - c$
Tangente in P_0	$(x_0, y_0, 1)B(x, y, 1)^T = 0$
Fascio di coniche	$F_1 + kF_2 = 0$; spezzate: $\det(B_1 + kB_2) = 0$